

М.Ю. Савкіна (Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Статистичні властивості оцінки точки переходу в моделі нелінійної сплайнової регресії

В деяких застосуваннях теорії обробки спостережень бажаний такий вибір регресійної моделі

$$y_i = x(\tau_i) + \xi_i, i = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

де функція регресії $x(\tau)$ – функція регресії, яка має вигляд

$$x(\tau) = (a\tau + b) + c_1(\tau - \tau^*)_+, \quad (2)$$

$(\tau - \tau_i)_+$ – усічена степенева функція [1], a, b, c_1, τ^* – невідомі параметри, які підлягають оцінюванню, а $\{\xi_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ – послідовність незалежних у сукупності нормально розподілених випадкових величин з $E\xi_i = 0$ та $D\xi_i = \sigma^2$.

Зауважимо, що модель (1),(2) є нелінійною.

Запропоновано такий алгоритм отримання оцінки τ^* на підставі траєкторії $x(\tau_0), x(\tau_1), \dots, x(\tau_n)$, який можна вважати модифікацією метода найменших квадратів. Спочатку припускається, що точка переходу τ^* розташована в точці τ_k . Для отримання оцінки вектора (a, b, c_1) скористаємося методом найменших квадратів, який полягає в мінімізації суми

$$\sum_{i=0}^n (x(\tau_i) - (a\tau_i + b) - c_1(\tau_i - \tau_k)_+)^2$$

по відношенню до вектора (a, b, c_1) . Найменше значення цієї суми, яке називається залишковою сумою квадратів, позначимо через s_k^2 . Покладаючи послідовно $k = 1, 2, \dots, n - 1$, отримаємо $n - 1$ значень $s_1^2, s_2^2, \dots, s_{n-1}^2$, серед яких вибираємо найменше $s_{k_0}^2$, а за оцінку точки переходу τ^* приймається точка τ_{k_0} : $\hat{\tau}^* = \tau_{k_0}$.

Оцінка $\hat{\tau}^*$ є випадковою величиною; за допомогою формули Бонфероні[2] знайдено межі для її математичного сподівання та дисперсії.

[1] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошніченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.

[2] Дэйвид Г. Порядковые статистики. — М.: Наука, 1979.
