В.Ф. Бабенко, С.В. Савела (Днепропетровский национальный ун-т им. О.Гончара)

Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы

Пусть H – гильбертово пространство, в котором задано разложение единицы $\{E_s\}_{s\in(-\infty;\infty)}$ (см., напр., [1, § 67]). Будем рассматривать задачу приближения элементов H подпространствами вида

$$W_\sigma = \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} dE_s g \ : g \in H \right\}, \ \sigma > 0.$$

Для f ∈ H положим $E_\sigma(f) = \inf\limits_{g\in W_\sigma} \| f - g \|$.

Заданное разложение единицы порождает группу унитарных операторов

$$U_t f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dE_s f$$

и самосопряженный оператор

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} s dE_s f .$$

Теорема 1. Для любого f ∈ H и любого σ > 0 справедливо неулучшаемое неравенство

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \| U_t f - f \|^2 \sin \sigma t \, dt \right)^{1/2} .$$

Теорема 2. Для любого r ∈ *N*, любого σ > 0 и любого f ∈ D(A^r) справедливо неулучшаемое неравенство

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sigma^r} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \| U_t A^r f - A^r f \|^2 \sin \sigma t \, dt \right)^{1/2} .$$

Полученные неравенства являются аналогами неравенств, полученных Н.И. Черных [2], [3] и В.Ю. Поповым [4] для наилучших L_2-приближений функций тригонометрическими полиномами и целыми функциями экспоненциального типа σ.

[1] **Ахиезер Н.И., Глазман И.М**. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: 1966. – 543 с.
[2] **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН. –1967. – 88.– С. 71–74.
[3] **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967.- 2.№5.-С. 513–522.
[4] **Попов В.Ю.** О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Известия ВУЗов. Математика. – 1972. – 121, № 6. – С. 65 – 73.