

Садыгова Сабина (инс. мат. и мех., Баку, Азербайджан)

О базисности близких систем

Известны много результатов относительно базисности близких в том или ином смысле систем в банаховых пространствах (см. напр. [1;2]). Приведем некоторое обобщение результата, приведенного в монографии [3] . Примем следующие определения.

Определение 1. Систему $\{\varphi_n\}_{n \in N} \subset H$ назовем ω -линейно независимой в гильбертовом пространстве H , если из $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0, \forall n \in N$.

Определение 2. Системы $\{\varphi_n\}_{n \in N}; \{\psi_n\}_{n \in N} \subset H$ назовем K_p -квадратично близкими, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\|\varphi_n - \psi_n\|^2 - \frac{|\langle \varphi_n - \psi_n, \psi_n \rangle|^2}{\|\psi_n\|^2} \right)^{\frac{p}{2}} < +\infty,$$

где $\|\cdot\|$ -норма в H .

Определение 3. Базис $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ в H назовем q -базисом, если для $\forall x \in H: \{\varphi_n^*(x)\}_{n \in N} \in l_q$, где $\{\varphi_n^*\}_{n \in N} \subset H$ сопряженная к $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ система.

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ q -базис в H и $\Psi \equiv \{\psi_n\}_{n \in N} \subset H$ K_p -близкая к нему система, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Ψ полна;
- 2) Ψ минимальна;
- 3) Ψ ω -линейно независима;
- 4) Ψ образует базис в H .

В частности при $p=2$ получаем

Следствие 1. Пусть $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ базис Рисса в H и $\{\psi_n\}_{n \in N} \subset H$ K_2 -квадратично близка к нему система. Тогда относительно системы $\{\psi_n\}_{n \in N}$ справедливо утверждение теоремы 1.

Это следствие усиливает результат из работы [3] .

[1] Мильман В.Д. // Усп.мат.наук.-1970.-25, в.3, с.113-174.

[2] Zinger I. Bases in Banach spaces.I-Berlin:Springer-1970.-668 p.

[3] Като Т. Теория возмущений линейных операторов, М., "Мир".-1972.-738 с.
