И.К. Рысцов (Национальный технический университет Украины, Киев, Украина)

Замечание по поводу доказательства гипотезы Коллатца

Формулировка гипотезы (проблемы) Коллатца очень проста. Рассмотрим функцию $F(n)$, определенную на натуральных числах следующим образом:

$$F(n) = \ if \ n \equiv 0 \ mod \ 2 \ then \ n/2 \ else \ 3n + 1. \tag{1}$$

Обозначим через $F^{(k)}$ k-кратную суперпозицию функции F. Нужно доказать, что для каждого числа n найдется натуральное число k , такое, что $F^{(k)}(n) = 1$. Другими словами, итерационный процесс заканчивается независимо от начального числа.

Этой проблеме, которая расположена на стыке теории чисел и теории итерационных процессов, уже более 70 лет, она имеет много разных названий и богатую литературу [1, 2], поэтому любое продвижение в ее решении вызывает большой интерес. Недавно латиноамериканский математик Кадоган анонсировал ее решение [3]. Его работа содержит ряд интересных идей и результатов, на которых мы не можем здесь подробно останавливаться, поэтому отметим лишь основные моменты.

Назовем два натуральных числа m и n подобными ($m \equiv n$), если их траектории $Traj(m) = \{F^{(k)}(m) \,|k \geq 0\}$ и $Traj(n) = \{F^{(k)}(n) \,|k \geq 0\}$ пересекаются (сливаются). Нетрудно, видеть, что отношение подобия будет отношением эквивалентности и фактически гипотеза Коллатца утверждает, что все натуральные числа подобны между собой в этом смысле. Каждое четное число подобно некоторому нечетному числу, поэтому можно ограничиться доказательством эквивалентности всех нечетных чисел. Кадоган представляет все нечетные числа в виде бесконечной таблицы T, элементы которой $t(i, j)$ определяются следующим образом:

$$t(i, j) = 2^{i+1}j + 2^i - 1, i \geq 1, j \geq 0. \tag{2}$$

Далее, Кадоган пытается доказать, что все числа в столбцах этой таблицы подобны между собой. Если бы это удалось сделать, то проблема была бы решена, поскольку простые индуктивные соображения показывают, что в этом случае все элементы первой строки этой таблицы подобны между собой, а значит и все нечетные числа должны быть подобны между собой.

С помощью вспомогательной таблицы $n(i, j)$ и длинной цепочки простых лемм Кадоган доказывает, что $t(i, j) \equiv t(i, j + 1)$, если число $n(i, j)$ - нечетное (Теорема 2.12). Далее, при доказательстве аналогичного утверждения при четном $n(i, j)$ он допускает ошибку. Перед свойством (2.6) он пользуется условием $1 + 2t(i, j) \equiv 1 + 3n(i+1, j)$, ссылаясь при этом на свойство (2.5), в котором показано, что $1+2t(i, j) \equiv 1+3n(i, j)$. Такая невольная замена индексов приводит к тому, что одна из основных теорем (теорема 2.15) остается недоказанной, поскольку она опирается на свойство (2.6).

Таким образом, проблема Коллатца, по-прежнему, остается открытой, что подтверждается замечанием Лагариаса, сделанным им в его аннотированной библиографии [4]. Значит еще не поздно претендовать на 1000 фунтов, которые английский математик Твейн обещал выплатить тому, кто решит эту проблему.

[1] Lagarias J. // Amer. Math. Monthly. — 1985. — **92**, N 1, p. 3-23.

[2] Wirsching G. The Dynamical System Generated by the 3n + 1 Function. — Berlin: Springer, 1998.

[3] Cadogan C. // Caribb. J. Math. Comput. Sci. — 2006. — **13**, p. 1-11.

[4] Lagarias J. // http://arxiv.org/abs/math.NT/0608208 — 2008.