*А. В. Руссєв*

## Групи автоматів над скінченним алфавітом

Нехай $X$ — деяка скінченна непорожня множина, яку будемо називати алфавітом, а її елементи — літерами. Символом $S(X)$ будемо позначати симетричну групу на множині $X$. Автоматом над алфавітом $X$ називається набір $A = \langle X, Q, \varphi, \lambda \rangle$, де $Q$ — множина внутрішніх станів автомата, $\varphi : Q \times X \to Q$ — функція переходів, $\lambda : Q \times X \to X$ — функція виходів.

Розглянемо множину $X^* = \bigcup_{n \geq 1} X^n \cup \{\Lambda\}$ всіх слів над алфавітом $X$ з операцією приписування слів. Символом $\Lambda$ будемо позначати порожнє слово — нейтральний елемент відносно цієї операції. Функції переходів та виходів автомата $A = \langle X, Q, \varphi, \lambda \rangle$ продовжуються на множину $Q \times X^*$ за правилом: для $q \in Q$, $w \in X^*$ та $x \in X$

$$\begin{aligned} \varphi(q, wx) &= \varphi(\varphi(q, w), x), & \varphi(q, \Lambda) &= q, \\ \lambda(q, wx) &= \lambda(q, w)\lambda(\varphi(q, w), x), & \lambda(q, \Lambda) &= \Lambda. \end{aligned}$$

Кожному стану $q \in Q$ відповідає відображення $f_q = \lambda(q, \cdot) : X^* \to X^*$. Якщо всі ці відображення є біекціями, то автомат називається оборотним.

Групою, породженою оборотним автоматом $A = \langle X, Q, \varphi, \lambda \rangle$, називається група, породжена перетвореннями $f_q$, де $q$ пробігає всі стани автомату $A$ ([1]).

Для класу груп, породжених автоматами над алфавітом $X$, мають місце такі результати про замкненість відносно теоретико-групових операцій

**Теорема 1.** *Нехай $G$ є групою, породженою (скінченним) автоматом $A$ над алфавітом $X$, $P < S(X)$ та для кожного стану $q$ автомата $A$ підстановка $\lambda(q, \cdot)$ належить групі $P$. Тоді група $P \wr G$ також є групою, породженою (скінченним) автоматом над алфавітом $X$.*

**Теорема 2.** *Нехай $G$ є групою, породженою (скінченним) автоматом над алфавітом $X$. Тоді група $\bigoplus_{i=1}^{n} G$ для кожного натурального $n$ також є групою, породженою (скінченним) автоматом над алфавітом $X$.*

**Наслідок 1.** *Для кожного натурального $n$ існують $n + 1$-станові автомати, що породжують групи $\wr_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_2$ та $\mathbb{Z}^n$.*

[1] *Nekrashevych V. V.* Self-similar groups, volume 117 of Mathematical Surveys and Monographs. – American Mathematical Society: Providence, RI, 2005. – 231 p.