M.Ronto, Н.М.Щобак, К.В.Маринець (Institute of Mathematics, University of Miskolc, Hungary, Ужгородський національний університет, Україна)

Дослідження розв'язків деяких k-точкових крайових задач типу Коші-Ніколетті по частині змінних

Розглянемо нелінійну задачу

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

з k-точковими крайовими умовами типу Коші-Ніколетті по частині змінних

$$\begin{gathered} x_s(t_1) = x_{s0}, \quad s = 1, \ldots, p, \\ \sum_{j=1}^{k-p-1} x_i(t_{p+j}) = d_{p+1}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \\ x_{p+1+m}(T) = d_{p+1+m}, \quad m = 1, \ldots, n-(p+1), \end{gathered} \tag{2}$$

де $t_1 = 0 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_p < t_{p+1} < t_{p+2} < \ldots < t_{k-1} < t_k = T$, функція $f: [0,T] \times D \to R^n$ є неперервною, а множина $D \subset R^n$ – замкнена та обмежена.

Крайові умови (2) можна записати у матрично-векторному вигляді

$$Ax(0) + \sum_{j=1}^{k-p-1} Bx_i(t_{p+j}) + C_1 x(T) = d, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3}$$

де $A = \left(\begin{smallmatrix} E_p & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \{b_{il}\}$, $i, l \in \{1, \ldots, n\}$, $b_{il} = \begin{cases} 0, & i \neq l \\ 1, & i = l \end{cases}$, $C_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-(p+1)} \end{smallmatrix}\right)$, E_p, $E_{n-(p+1)}$ це p– та $n-(p+1)$–вимірні одиничні матриці, а вектор $d = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{p0} \\ d_{p+1} \\ d_{p+2} \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$.

Очевидно, із співвідношення (3) випливає, що

$$Ax(0) + C_1 x(T) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{p0} \\ 0 \\ d_{p+2} \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для того, щоб обійти виродженість матриці C_1, замінимо значення $p+1$ компоненти розв'язку задачі (1), (3) у точці T параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$:

$$\lambda_1 = x_1(T), \; \lambda_2 = x_2(T), \; \ldots, \; \lambda_{p+1} = x_{p+1}(T). \tag{5}$$

Використовуючи рівності (5), крайові умови (4) запишуться у наступному вигляді:

$$A\ x\,(0) + C\ x\,(T) = d\,(\lambda)\ \ , \tag{6}$$

де $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1})$, $C = E_n$ — n–вимірна одинична матриця, $d\,(\lambda) = \begin{pmatrix} x_{10}+\lambda_1 \\ \vdots \\ x_{p0}+\lambda_p \\ \lambda_{p+1} \\ d_{p+2} \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$.

Сім'я розв'язків вихідної крайової задачі (1), (2) співпадає з розв'язками задачі (1), (6), які задовольняють додаткові умови (5).

При певних припущеннях, користуючись невиродженістю матриці C, на основі чисельно-аналітичного методу послідовних наближень [1-3] обґрунтовується існування розв'язків крайової задачі (1), (2).

[1] Ronto M., Samoilenko A.M. Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. — River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc., 2000.

[2] Ronto A.N., Ronto M., Shchobak N.M. On the parametrization of three-point nonlinear boundary value problems // Nonlinear Oscillations — 2004. — Vol. 7, no. 3. — P. 384–402.

[3] Ронто М.Й., Щобак Н.М., Маринець К.В. Про параметризацію крайових задач типу Коші-Ніколетті // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. та інформ. — 2008. — Вип. 16. — С. 163–173.