В.С. Романюк (Институт математики НАН Украины, Киев, Украина)

Адаптивное приближение функций многих переменных

Доклад касается вопросов адаптивного приближения функций многих переменных при помощи конечномерных агрегатов, построенных на базе разложений этих функций в ряд Фурье по тригонометрической системе.

Пусть $L_s(T^d)$, $1 \le s \le \infty$, — пространства Лебега 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)$, $x = (x_1, \cdots, x_d)$, наделенные стандартной нормой $\|\cdot\|_s$.

Предметом исследований являются величины:

$$e_M^{\perp}(F)_s := \sup_{f\in F} \inf_{\Omega:\, \#\Omega=M} \|f(x) - \sum_{k\in\Omega} \widehat{f}(k)e^{i(k,x)}\|_s, \ F \subset L_s(T^d),$$

где $\widehat{f}(k)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{e^{i(k,x)}\}_{k\in Z^d}$ и Ω — конечное множество d-мерных векторов в Z^d, $\#\Omega = M$;

$$G_M(F)_s := \sup_{f\in F} \|f(x) - \sum_{l=1}^{M} \widehat{f}(k(l))e^{i(k(l),x)}\|_s,$$

где $\{|\widehat{f}(k(l))|\}_{l=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка $\{|\widehat{f}(k)|\}_{k\in Z^d}$;

$$e_M(F)_s := \sup_{f\in F} \inf_{\substack{\Omega:\, \#\Omega=M \\ c_k\in C}} \|f(x) - \sum_{k\in\Omega} c_k e^{i(k,x)}\|_s.$$

Из определений очевидно соотношение $e_M(F)_s \le e_M^{\perp}(F)_s \le G_M(F)_s$.

В [1] были установлены порядковые (относительно параметра M) оценки величин $e_M(\mathcal{F}_q^r)_s$, а в [2] — величин $G_M(\mathcal{F}_q^r)_s$ при всех $0 < q < \infty$, $1 \le s \le \infty$ и $r > d(1 - \frac{1}{q})_+$ для классов

$$\mathcal{F}_q^r := \Big\{ f \in L_1(T^d) : \|f\|_{\mathcal{F}_q^r} := \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{rq} \sum_{k\in I_{m,d}} |\widehat{f}(k)|^q \Big)^{1/q} \le 1, \, |\widehat{f}(0)| \le 1 \Big\},$$

где $I_{m,d} = \{k \in Z^d : \ |k|_\infty := \max\{|k_1|, \cdots, |k_d|\} = m\}$.

Оказалось, что при $1 \le s \le 2$ оценки для $e_M(\mathcal{F}_q^r)_s$ и $G_M(\mathcal{F}_q^r)_s$ совпадают (по порядку), а при $2 < s \le \infty$ — отличаются.

Нами установлено, что подобным образом соотносятся между собой и значения величин $e_M(A_q^R)_s$ и $e_M^{\perp}(A_q^R)_s$ для классов

$$A_q^R := \Big\{ f \in L_1(T^d) : \|f\|_{A_q^R} := \Big(\sum_{m=0}^{\infty} R^{mq} \sum_{k\in\Theta(m,d)} |\widehat{f}(k)|^q \Big)^{1/q} \le 1 \Big\},$$

$R > 1$ — фиксировано, $0 < q < \infty$ и $\Theta(m,d) := \{k \in Z^d : \ |k|_1 := \sum_{j=1}^{d} |k_j| = m, \ m \in Z_+\}$

Теорема 1. *Пусть* $0 < q < \infty$, $2 \leq s \leq \infty$. *Тогда*

$$e_M^{\perp}(A_q^R)_s \asymp R^{-\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}} M^{(1-\frac{1}{d})(1-\frac{1}{s}-\frac{1}{q})}.$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < q < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$. *Тогда*

$$e_M(A_q^R)_s \ll R^{-\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}} M^{(1-\frac{1}{d})(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}.$$

[1] R.A.De Vore, V.N.Temlyakov. Nonlinear Approximation by Trigonometric Sums // J.Fourier Anal.Appl., 2: 1 (1995), 29–48.

[2] V.N.Temlyakov. Greedy Algorithm and m-Term Trigonometric Approximation // Constr.Appr., 14 (1998), 569–587.