І.Д. Пукальський (Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна)

Нелокальна задача Діріхле і задача оптимального керування для параболічного рівняння з виродженням

Нехай Ω – деяка обмежена область простору $\mathbb{R}^n$, $\dim\Omega \leq n-1$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\overline{\Omega} \subset \overline{D}$, t_0, T – фіксовані додатні числа, $t_0 < T$. У області $Q = [0,T)\times D$ розглянуто задачу знаходження функцій $(u(t,x;p(t,x),q(x)),p(t,x),q(x))$, на яких функціонал

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_D \mathcal{F}_1(t,x;u(t,x;p,q);p)dx + \int_D \mathcal{F}_2(x;u(T,x;p,q),q)dx \tag{1}$$

досягає мінімуму у класі V: $(p,q) \in V = \{p(t,x) \in C^{\alpha}(Q), p_1 \leq p \leq p_2; q(x) \in C^{2+\alpha}(D), q_1 \leq q \leq q_2\}$, із яких $u(t,x;p,q)$ задовольняє при $(t,x) \in Q^{(0)} = Q \setminus \Big\{(t,x) \in \Big((t=t_0, x \in D) \cup (t \in [0,T), x \in \Omega)\Big)\Big\}$ рівняння

$$\partial_t u - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial^2_{x_ix_j}u - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i}u - A_0(t,x)u = f(t,x;p(t,x)) \tag{2}$$

і нелокальну умову

$$u(0,x;p(0,x),q(x)) + \int_0^T a(\tau,x)u(\tau,x;p(\tau,x),q(x))d\tau = \varphi(x;q(x)), \tag{3}$$

а на бічній межі $\Gamma = [0,T) \times \partial D$ – крайову умову

$$u\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{4}$$

Позначимо через $\rho(x;\partial\Omega)$ – відстань від $x \in \overline{D} \setminus \overline{\Omega}$ до $\overline{\Omega}$; $s_1(a^{(1)};t) = |t-t_0|^{a^{(1)}}$ при $|t-t_0| \leq 1$, $t \in [0,T)$; $s_1(a^{(1)};t) = 1$ при $|t-t_0| \geq 1$; $s_2(a^{(2)};x) = \rho^{a^{(2)}}(x,\partial\Omega)$ при $\rho(x,\partial\Omega) \leq 1$, $x \in \overline{D} \setminus \overline{\Omega}$; $s_2(a^{(2)};x) = 1$ при $\rho(x,\partial\Omega) \geq 1$; $s(a,M) = s_1(a^{(1)};t)s_2(a^{(2)};x)$, $a = (a^{(1)},a^{(2)})$, $M(t,x) \in \overline{D} \setminus \overline{\Omega}$.

Означення просторів $C^r(\gamma;\beta;a;Q,\Omega)$ і $C^r(\mu_i;Q;\Omega)$, у яких вивчається задача (1) – (4), наведено у [1].

Задачу (1) – (4) досліджено при виконанні умов:

1) Коефіцієнти $A_i \in C^{\alpha}(\mu_i, Q; \Omega)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $A_0 \leq K < \infty$, $K - const$, $A_{ij} \in C^{\alpha}(\beta_i + \beta_j, Q; \Omega)$ і для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n} s(\beta_i + \beta_j; M) A_{ij}(M) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі.

Функція $a(\tau, x) \in C^{2+\alpha}(Q)$, $\sup\limits_{\overline{Q}} \int\limits_0^T |a(\tau, x)| e^{-\lambda \tau} d\tau \leq \lambda_0 < 1$, де λ – довільне число, яке задовольняє нерівність $\lambda < \inf\limits_{\overline{Q}} (-A_0(t, x))$.

2) Функції $f \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; \mu_0; Q; \Omega)$, $\varphi \in C^{2+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D; \Omega)$, $\gamma^{(\nu)} = \max\left\{ \max\limits_i (1 - \beta_i^{(\nu)}), \max\limits_j (\mu_j^{(\nu)} - \beta_j^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2} \right\}$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\mu_j^{(\nu)} \geq 0$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$, межа ∂D належить класу $C^{2+\alpha}$.

За умов 1) – 2) існує єдиний розв'язок задачі (2) – (4) і має місце оцінка

$$\|u; \gamma, \beta; 0; Q; \Omega\|_{2+\alpha} \leq c \Big(\|f; \gamma, \beta; \mu_0; Q; \Omega\|_{\alpha} + \|\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D; \Omega\|_{2+\alpha} \Big). \qquad (5)$$

Якщо $f \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q; \Omega)$ і виконані умови 1) – 2), то єдиний розв'язок задачі (2) – (4) у просторі $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q; \Omega)$ визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою

$$u(t, x) = \int\limits_Q \Gamma_1(t, x; d\tau, d\xi) f(\tau, \xi; p(\tau, \xi)) + \int\limits_D \Gamma_2(t, x; d\xi) \varphi(\xi; q(\xi)).$$

Щодо задачі (1) – (4), то припускаємо виконання умови:

3) Функції $\mathcal{F}_1(t, x; u(t, x; p(t, x); q(x)), p(t, x))$, $f_1(t, x; p(t, x))$ і $\mathcal{F}_2(x; u(T, x; p(T, x); q(x)), q(x))$, $\varphi(x; q(x))$ належать простору $C^{\alpha}(Q)$ і мають неперервні гельдерові похідні другого порядку за u, p, q.

Встановлено існування і оцінки оптимального розв'язку задачі (1) – (4).

[1] Пукальський І.Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженням і особливостями / Пукальський Іван Дмитрович. – Монографія. – Чернівці, 2008. – 253с