А.А. Зевин, С.Ю. Пославский (Институт транспортных систем и технологий НАН Украины, Украина)

Двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t-\tau(t)), t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $\tau(t) \in [0, h]$ и $x(t) = x_0(t)$ при $t \in [-h, 0]$. Функции $\tau(t)$, $x_0(t)$ и $f(x,t)$ кусочно-непрерывны, причем

$$\|f(x,t)\| \le k\|x\|. \tag{2}$$

Наибольший показатель Ляпунова равен

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(k,h) = \sup \lambda(\tau, f, x_0), \tag{3}$$

где $\lambda(\tau, f, x_0)$ – показатель Ляпунова решения $x(\tau, f, x_0)$, а супремум вычисляется по всем функциям $\tau(t)$, $x_0(t)$ и $f(x,t)$, удовлетворяющим указанным условиям.

Найдены верхняя и нижняя оценки λ_+ и λ_- показателя $\bar{\lambda}$. Величина λ_+ является корнем уравнения

$$\exp(-\lambda h) k \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\|W(t)\| dt = 1, \tag{4}$$

где $W(t-s)$ – матрицант уравнения $\dot{x}(t) + Ax(t) = 0$.

Нижняя оценка определяется из соотношения

$$\lambda_- = \sup_{\tau,\varphi} \operatorname{Re}\left[\lambda(\tau,\varphi)\right] \tag{5}$$

где $\tau \in [0, h]$ и $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_k)$ – параметры, $\lambda(\tau,\varphi)$ – корень уравнения

$$\det\left[kC(\varphi)\exp(-\lambda\tau) - A - \lambda I\right] = 0, \tag{6}$$

$C(\varphi)$ – ортогональная, I – единичная матрица.

Приведены примеры, иллюстрирующие эффективность полученных оценок.