О.Д.Поліщук (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, Львів, Україна)

Побудова граничних операторів для рівняння Лапласа в R^3 методами теорії потенціалу

Необхідність розв'язання граничних задач для рівняння Лапласа виникає під час моделювання багатьох фізичних процесів (дифузія, тепловий потік, електростатичне поле, течія ідеальної рідини, пружні рухи твердого тіла, течія грунтових вод тощо) [2]. При цьому у випадку замкнених граничних поверхонь їх звично поділяють на внутрішні та зовнішні і досліджують окремо [3]. Аналогічна ситуація має місце і при розв'язанні цих задач за допомогою методів скінченних різниць, скінченних елементів тощо. Використання методів теорії потенціалу дозволяє розглядати та досліджувати граничні задачі в R^3 не поділяючи їх на внутрішні і зовнішні [1, 2]. Ця обставина відіграє також особливу роль при розв'язанні граничних задач у випадку розімкнених граничних поверхонь, коли задача безумовно ставиться у всьому просторі [1].

Використання методів теорії потенціалу також дозволяє вирішити проблему конструктивної (тобто без чисельного розв'язання відповідних граничних задач для рівняння Лапласа) побудови так званих граничних операторів [5], тобто операторів, які по відомому значенню граничної умови одного типу дозволяють визначити невідоме значення умови іншого типу. Граничні оператори широко використовуються при вирішенні різних проблем математичної фізики [5], наприклад, при дослідженні температурних потоків на границі кукси ампутованої кінцівки людини у приймальній гільзі протеза, якщо відома температура на поверхні, та реалізації чисельних методів їх розв'язання, зокрема методу ітерацій по підобластях, спряжених без накладання [4]. Апарат граничних операторів також виявляється ефективним інструментом для встановлення умов коректної розв'язності ряду граничних задач для рівняння Лапласа.

Очевидно, що властивості граничних операторів безпосередньо залежать від умов коректної розв'язності відповідних граничних задач для рівняння Лапласа як в диференціальній, так і в інтегральній постановках. Тому при дослідженні граничних операторів у даній роботі частково здійснюється огляд отриманих на даний час результатів щодо умов коректної розв'язності як граничних задач для рівняння Лапласа в R^3, так і еквівалентних їм інтегральних рівнянь для потенціалів простого і подвійного шару у випадку замкнених граничних поверхонь.

При формулюванні граничних задач для рівняння Лапласа в R^3 з метою їх подальшого розв'язання з використанням потенціалів простого та подвійного шару слід враховувати поведінку цих потенціалів при переході через граничну поверхню, тобто стрибок нормальної похідної у випадку потенціала простого шару і стрибок шуканої функції у випадку потенціала подвійного шару. На прикладі задачі Діріхле це означає, що якщо шукана функція є неперервною при переході через границю, а її нормальна похідна має стрибок, то ми можемо ставити одну граничну умову, яка справджується для обох сторін границі, і використовувати для розв'язання сформульованої задачі потенціал простого шару [7]; якщо шукана функція має стрибок при переході через границю, а її нормальна похідна є неперервною, то ми повинні ставити окремі граничні умови на кожній із сторін границі, і використовувати для розв'язання сформульованої задачі потенціал подвійого шару [6]; якщо ж і шукана функція, і її нормальна похідна мають стрибок при переході через границю, ми також повинні ставити окремі граничні умови на кожній із сторін границі, і використовувати для розв'язання сформульованої задачі суму потенціалів простого і подвійого шару [8]. Тобто, в залежності від поведінки шуканої функції при переході через граничну поверхню, ми повинні формулювати одно- або двохсторонні граничні задачі та використовувати для їх розв'язання потенціал відповідного типу. У деяких випадках задача суттєво спрощується. Так, у другому випадку ми відразу можемо отримати густину потенціала подвійного шару, як різницю відомих граничних значень, і перейти до обчислення шуканої функції у будь-якій точці простору без розв'язання інтегрального рівняння [9]. У третьому випадку ми використовуємо для розв'язання двохсторонньої задачі Діріхле суму потенціалів простого і подвійного шару. Тут ми також можемо отримати густину потенціала подвійного шару, як різницю граничних значень. Тоді для можливості обчислення значень шуканої функції необхідно розв'язати лише одне інтегральне рівняння для потенціала простого шару [8].

Таким чином ми можемо сформувати класи граничних задач, які включатимуть задачі Діріхле, Неймана, з похилою похідною, з умовою стрибка шуканої функції чи (і) її нормальної похідної, змішані задачі тощо. Основною ознакою класу є поведінка шуканої функції при переході через граничну поверхню, тобто можливість її представлення у вигляді потенціала відповідного типу або суми потенціалів. Така класифікація та використання методів теорії потенціала дозволяє вирішити проблему конструктивної побудови граничних операторів.

[1] Бакалец В.А., Людкевич И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. ─ Львов: Изд-во ЛГУ, 1986.
[2] Громадка Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов. ─ М.: «Мир», 1990.
[3] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. ─ М.: «Мир», 1973.
[4] Кузнецов С.Б., Полищук А.Д. О решении пространственных краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений// Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа. ─ Новосибирск, 1988.
[5] Лебедев В.И., Агошков В.Н. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их применение в анализе. ─ М.: ОВМ АН СССР, 1983.
[6] *Giroure J.* Formulation variationnelle par equations integrales de problemes aux limites exterieurs// Rapport Interne du Centre de Mathem. Appl. de l'Ecole Politechnique. ─ 1976, N6.
[7] *Nedelec J.C., Planchard J.* Une methode variationnelle d'elements finis pour la resolution numerique d'un probleme exterieur dans R^3// R.A.I.R.O., ─1973, R3, N7.
[8] *Polishchuk A.D.* An integral equation solution of the Dirichlet and Neumann problems for the Laplacian in R^3 // Proc.of the VIII-th Intern. Seminar "Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory" (DIPED-2003). ─ Lviv, 2003.
[9] *Polishchuk A.D.* Simple and double layer potentials in the Hilbert spaces // Proc. of the VIII-th Intern. Seminar "Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory" (DIPED-2003). ─ Lviv, 2003.