Олексій Піддубний (Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна)

Про диференціальні властивості узагальненого оператора Пуассона

Досліджено диференціальні властивості узагальненого оператора Пуасона P_l. Знайдено оцінку швидкості наближення функцій, які зображуються у вигляді $u(\theta,\rho)= P_l$, середніми Вале-Пусена в метриці простору $L_p(D)$.

Нехай $D=\{z \in \mathbb{C}: |z|<1\}$, $T=\partial D, f \in L_p(T)$, $1\le p<\infty$, і

$$K_l(\rho e^{it}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^l} \cos kt, \quad 0<\rho<1,\ l>0..$$

Оператор P_l визначений на $L_p(T)$ формулою

$$P_l(f)(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})K_l\left(ze^{-it}\right)dt,\ z = \rho e^{i\theta}$$

називається узагальненим оператором Пуасона.

Ряд властивостей оператора P_l встановлено Я.С.Бугровим [1,2], в яких автор розглядає функції f, що належать класам Нікольського $H_p^{(r)}*$ і Бєсова $B_p^{(r)}*$. Ми продовжуємо дослідження Я.С.Бугрова, розглядаючи функції $f \in W^{(r)}H_p^{\omega_2}(T)$, де ω_2 - функція типу модуля неперервності другого порядку.

Теорема 1. Нехай $l \in N,\ r_1 \in Z_+,\ 1\le p<\infty.$ Якщо $f \in W^{(r_1)}H_p^{\omega_2}(T)$, то $P_l(f) \in W^{(r_1,r_2)}H_p^{\omega_2}(D),$ де

$$r_2 = \begin{cases} r_1 + \dfrac{l}{p} - 1, & \text{якщо } \left\{\dfrac{l}{p}\right\} = 0, \\ r_1 + \left[\dfrac{l}{p}\right], & \text{якщо } \left\{\dfrac{l}{p}\right\} \neq 0. \end{cases}$$

Відмітимо, що при $\omega_2 = t^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1,$ клас $W^{(r)}H_p^{\omega_2}(T),$ перетворюється в клас $H_p^{(r)}*$ і дана теорема цілком збігається з теоремою 3 роботи [2].

Теорема 2. Нехай $l \in N,\ r \in Z_+,\ 1\le p<\infty.$ Якщо $f \in W^{(r)}H_p^{\omega_2}(T)$, $1\le p<\infty,$ то

$$\|P_l(f - V_n(f))\|_{L_p(D)} = O(1)\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r+\frac{1}{p}}},\ n\in N,$$

де $V_n(f)$ - сума Вале – Пусена.

[1] Бугров Я.С. Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка // Mathematica(Cluj) – 1968. – **5**(28). – С. 5-25.
[2] Бугров Я.С. Свойства решений дифференциальных уравнений высшего порядка в терминах весовых классов // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **117**. – С. 47- 61.