А.В. Пененко (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институт математики им. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия)

Численный метод решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности с применением дискретно-аналитических аппроксимаций

Рассматривается задача о поиске коэффициента $k(x)$ в начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности:

$$u_t(x,t) - (k(x)u_x(x,t))_x = 0, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T], \tag{1}$$

$$k(0)u_x(0,t) = \alpha(t), \quad k(1)u_x(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

по известной функции $\alpha(t)$ и дополнительной информации о решении $f(t)$:

$$u(0,t) = f(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Обратная задача (1)-(4) переформулируется в виде операторного уравнения:

$$A(k) = f, \tag{5}$$

где оператор A ставит в соответствие коэффициенту k след решения u(0,t) краевой задачи (1)-(3) на границе $x = 0$.

Так как непосредственное решение операторного уравнения (5) затруднительно, для численного решения обратной задачи рассматривается дискретный аналог (5):

$$A_M(k) = f. \tag{6}$$

Для построения последовательности $\{k_n\}_{n\in N}$, минимизирующей норму невязки уравнения (6), применяется метод проекции градиента.

Конструирование (6) производится на основе (1)-(4) методом дискретно-аналитических аппроксимаций с привлечением локально-сопряженных задач [4]. Этот метод обеспечивает точный учет краевых условий по пространству и согласование всех элементов, необходимых для реализации метода проекции градиента.

Исследование свойств операторов из (5), (6) посредством теории сопряженных уравнений [1], [2] позволило доказать теорему, описывающую условия и характер сходимости последовательности $\{k_n\}_{n\in N}$ к решению (5). Для доказательства разработана модификация подхода, предложенного в [3] для нелинейных некорректных операторных уравнений с достаточно гладкими операторами.

Работа выполнена при поддержке программ фундаментальных исследований №16 Президиума РАН и №3 Отделения математических наук РАН, а также Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-05-00673).

[1] Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

[2] Пененко В.В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск: Наука, 1975. — С. 61–76.

[3] Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Козлов А.И. Стабилизирующиеся методы градиентного типа для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений. — М.: ЛКИ, 2007.

[4] Penenko V., Tsvetova E. // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2009. — **226**, С. 319–330