Г.П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев, Украина)

Линеаризация систем нелинейных функционально-разностных уравнений в окрестности положения равновесия

Одним из наиболее эффективных методов исследования систем нелинейных разностных уравнений вида

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + F(t, x(t)), \tag{1}$$

где $\Lambda-$постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица, $F : R^+ \times R^n \to R^n$, является метод нормальных форм Пуанкаре, позволяющий свести исследование таких систем уравнений в окрестности положения равновесия $x = 0$ $(F(t,0) \equiv 0)$ к исследованию систем наиболее простого вида. При этом такие наиболее простые формы указываются и зависят от условий, которым удовлетворяют матрица Λ и вектор-функция $F(t,x)$. Несмотря на это в настоящее время существуют уравнения, исследование которых с помощью метода нормальных форм не дает желаемых результатов. К таким уравнениям относятся, в частности, функционально-разностные уравнения вида

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + F(t, x(t), x(f(t))), \tag{2}$$

где $\Lambda-$постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица, $F : R^+ \times R^n \times R^n \to R^n$, $f : R^+ \to R^+$, которые исследуются в настоящей работе. Среди полученных здесь результатов отметим следующую теорему.

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) $det\Lambda \neq 0$, $|\Lambda| < 1$*;*

2) все элементы вектора $F(t,x,y)$ *и функция* $f(t)$ *являются непрерывными относительно всех своих аргументов в области* $D : t \in R^+, |x| < a, |y| < a,$ $F(t,0,0) \equiv 0$*;*

3) вектор-функция $F(t,x,y)$ *удовлетворяет соотношению:*

$$|F(t,x',y') - F(t,x'',y'')| \leq \varphi(t)(|x'-x''| + |y'-y''|),$$

где $\varphi(t)-$*некоторая неперерывная неотрицательная функция такая, что ряд*

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^i \varphi(t+i)$$

равномерно сходится при всех $t \in R^+$ *и* $2|\Lambda^{-1}|\Phi(t) \leq \theta < 1$.

Тогда существует непрерывная в области $\widehat{D} \subseteq D$ *взаимно-однозначная замена переменных*

$$x(t) = \Gamma(t, y(t)),$$

приводящая систему уравнений (2) к линейному виду

$$y(t+1) = \Lambda y(t).$$