О.М. Пелагенко (Київс. національний ун-т технологій та дизайну, Україна)

Збіжність в середньому інтегралів Фур'є сумовних функцій

Нехай $L_p(R) = L_p(-\infty, \infty)$, $1 \le p < \infty$, — множина вимірних на дійсній осі R функцій $f(x)$, $p-$тий степінь модуля яких інтегровний за Лебегом, з нормою $||f||_{L_p(R)} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, а $c(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ixt} dt$ — комплексне перетворення Фур'є функції $f \in L_1(R)$. Покладемо $S_\sigma(f;x) = \int\limits_{-(\sigma+1)}^{\sigma+1} c(s)\, e^{isx} ds$, де $\sigma \ge 1$.

Будемо казати, що інтеграл $S_\sigma(f;x)$ збігається в середньому до функції $f(x)$, якщо при $\sigma \to \infty$

$$||f - S_\sigma(f)||_{L_1(R)} \to 0. \tag{1}$$

Метою даної роботи є знаходження умов, необхідних для виконання (1).

Теорема 1. *Нехай $f(x) \in L_1(R)$. Для виконання співвідношення (1) необхідно, щоб при $\sigma \to \infty$*

$$\int\limits_1^{\sigma} \frac{|c(t+\sigma)| + |c(-t-\sigma)|}{t}\, dt \to 0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Для обмеженості інтегралів $S_\sigma(f;x)$ в просторі L_1 необхідно, щоб*

$$\int\limits_1^{\sigma} \frac{|c(t+\sigma)| + |c(-t-\sigma)|}{t} dt \le C.$$

Зауваження. Відомо [1], що для збіжності в середньому рядів Фур'є $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ відповідно до функцій $c(\cdot)$ і $s(\cdot)$ з простору L_1, необхідно, щоб

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n+k}|}{k} = 0,$$

де L_1 — простір $2\pi-$періодичних інтегровних функцій $f(x)$ з нормою $||f||_{L_1} = \int\limits_0^{2\pi} |f(x)| dx$. Теореми 1 і 2 є інтегральним аналогом теореми 1 з [1].

[1] Задерей П.В., Смаль Б.А. О сходимости в пространстве рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 5.

[2] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литер., 1960.

[3] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации — М.: Наука, 1965.

[4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды — М.: Мир, 1965. —Т.2.