В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович (Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара)

Несимметричные приближения классов периодических функций сплайнами дефекта 2

Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, – пространства 2π-периодических функций $f : R \to R$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$. Если $f \in L_p$ и α, β – положительные числа, то положим $\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p$, где $f_\pm(t) = \max\{\pm f(t), 0\}$.

Пусть $M \subset L_p$ – некоторый класс функций. Величина

$$E(M,H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f\in M} \inf_{h\in H} \|f-h\|_{p;\alpha,\beta}$$

называется наилучшим (α,β)-приближением класса M множеством H в метрике L_p. Пусть множество $F \subset L_1$ таково, что $\{f \in F : f \perp 1\} \ne \emptyset$. Для $r = 1, 2, ...$, обозначим через $W^r F$ класс функций $f \in L_1$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} = f)$ локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in F$.

Для неотрицательной функции $f \in L_1$ обозначим через $r(f,t)$ неубывающую перестановку сужения функции f на промежуток $[0, 2\pi]$. Если g – произвольная функция из L_1, то положим

$$\Pi(g,t) := r(g_+,t) - r(g_-, 2\pi - t).$$

Множество $F \in L_1$ назовем Π- инвариантным, если из того, что $f \in F$ и $\Pi(g) = \Pi(f)$, следует, что $g \in F$. Для натуральных n и m через $S^2_{2n,m}$ будем обозначать пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка m дефекта 2 с узлами в точках $2j\pi/n$, $j \in Z$. Пусть еще $\varphi_{n,m}(\alpha,\beta;t)$ $(\alpha,\beta > 0,\ \lambda > 0,\ m \in N)$ – $2\pi/n$-периодический интеграл порядка m с нулевым средним значением на периоде от четной $2\pi/n$-периодической функции $\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;t)$, которая для $t \in [0, \frac{\pi}{n})$ определяется следующим образом

$$\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \le t \le \frac{\pi\beta}{n(\alpha+\beta)}, \\ -\beta, & \frac{\pi\beta}{n(\alpha+\beta)} < t \le \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Нами доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $n, r, m \in N$, $m \ge r+1$, $\alpha, \beta > 0$, F – произвольное Π-инвариантное множество 2π-периодических функций. Тогда*

$$E(W^r F, S^2_{2n,m})_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r}(\alpha,\beta;t))\,dt.$$

Из теоремы 1 при $\alpha = \beta = 1$ получаем наилучшие, а при $\max\{\alpha,\beta\} = \infty$, $\min\{\alpha,\beta\} = 1$ – наилучшие односторонние приближения классов $W^r F$ подпространствами $S^2_{2n,m}$ в пространстве L_1. Кроме того, из этой теоремы следует ряд точных неравенств типа Джексона.