И. Н. Панкратова (Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан)

Зависимость от параметров динамики семейства n- мерных систем

Рассматривается динамическая система F^m [1],

$$F : L^n \to L^n, \quad Fx = \Phi(x)Ax,$$

на компакте

$$K_a^n = \{x \in L^n \mid x \geq 0, \ \|x\| \leq a, \ a > 0\}.$$

Здесь L^n – n-мерное линейное нормированное пространство, A – $n \times n$- матрица, $\Phi(x)$ – скалярная функция ($x \geq 0$ означает $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ и $\|x\|$ – норма (длина) вектора x). Множество K_a^n инвариантно относительно отображения F, т.е. $FK_a^n \subseteq K_a^n$, если $\Phi(x) \geq 0$ непрерывна в K_a^n, A – неотрицательная матрица с элементами $a_{ij} \geq 0 \ \ \forall i, j = \overline{1,n}$ и $\|A\| \leq a/\tilde{C}$, где $\tilde{C} = \max\limits_{x \in K_a^n} \Phi(x)\|x\|$ и $\|A\|$ – норма матрицы A, согласованная с векторной нормой пространства L^n.

Описание динамики системы F^m в K_a^n сводится к изучению поведения ее траекторий на так называемых *циклических инвариантных множествах M_p отображения F конечного периода $p \geq 1$*, содержащих все ω- предельные множества системы F^m. Расположение множеств M_p в K_a^n и их периоды определяются линейной частью отображения F (матрицей $A \geq 0$) и не зависят от вида функции $\Phi(x)$. Множество M_p состоит из одного инвариантного относительно F отрезка луча длины a вдоль неотрицательного собственного вектора матрицы $A \geq 0$, соответствующего собственному значению $\lambda \geq 0$ матрицы A, и континуума инвариантных относительно F множеств J_p. Множество J_p состоит из p циклически переходящих друг в друга под действием отображения F отрезков лучей длины a вдоль собственных векторов матрицы A^p, соответствующих числу λ^p, и называется *циклом отрезков лучей конечного периода* ($p \geq 1$). При $p > 1$ точка $x \in M_p$, траектория $F^m x$ и ее ω- предельное множество $\omega_F x$ принадлежат одному и тому же циклу отрезков лучей $J_p \subset M_p$ периода p или одному отрезку луча (множеству $M_1 \subset M_p$ периода 1). Период p множества M_p совпадает с количеством параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, которыми описывается динамика системы F^m на множестве M_p. В пространстве K_a^n возможно существование нескольких (и даже континуума) множеств M_p отображения F разных периодов в разных частях фазового пространства. Поэтому динамика системы F^m в K_a^n определяется, в общем случае, наборами параметров $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $p \in N$.

Обозначим через $p^* = \max\{p\} > 1$ наибольший период множеств M_p в семействе n- мерных отображений F, $n > 1$. Период p^*, как функция от размерности системы n, является неубывающей и $p^* > n$ при $n \geq 5$, $p^* > n^2$ при $n \geq 19$.

Типичность некоторого свойства системы F^m будем понимать с метрической точки зрения (в смысле меры Лебега, введенной в пространстве параметров – коэффициентов матрицы A). Пусть отображение $\widehat{F}$ имеет множество M_{p^*} периода $p^* > 1$.

Теорема 1. *Динамика системы* $\widehat{F}^m$ *не является типичной.*

Теорема 2. *Однопараметрическая динамика системы* F^m *является типичной.*

Для доказательства утверждений достаточно показать, что в пространстве параметров (коэффициентов матрицы A) элементы матрицы системы $\widehat{F}^m$ образуют множество нулевой меры, а элементы матрицы системы F^m с однопараметрической динамикой образуют множество полной меры.

Из теорем 1,2 следуют некоторые рекомендации по численному определению динамики системы F^m. Во-первых, согласно проведенным исследованиям параметрической зависимости динамики системы F^m рост числа *параметров системы* (увеличение числа ненулевых элементов матрицы $A \geq 0$ системы F^m) не обязательно приводит к росту числа параметров, которыми описывается динамика системы F^m (*параметры динамики*). При максимальной зависимости системы F^m от параметров (n^2 параметров системы) ее динамика становится одномерной однопараметрической. При этом изменение значений параметров системы F^m ($A > 0$) приводит лишь к изменению положения инвариантного отрезка луча – множества $M_1 \subset K_a^n$ при $n > 1$, притягивающего все траектории системы F^m. Таким образом, если одномерная однопараметрическая динамика системы F^m известна, то нет необходимости проводить численный эксперимент для описания динамики системы F^m, зависящей от n^2 параметров. Отметим, что, как правило, при зависимости системы F^m от большого числа (сравнимого с n^2) параметров ее динамика описывается одним или несколькими параметрами, точнее, наборы $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ состоят из одного или нескольких параметров. Во-вторых, зависимость от небольшого числа параметров системы не гарантирует успех компьютерной диагностики ее динамики, например, динамики системы $\widehat{F}^m$. Все определяется наличием в фазовом пространстве системы циклических инвариантных множеств M_p периода $p > n^2$, имеющих в K_a^n области притяжения ненулевой меры. Если такие множества существуют, то необходим дальнейший теоретический анализ системы F^m: определение наборов параметров $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, которыми описывается динамика системы F^m, числа входящих в наборы параметров и области их значений. В противном случае, численно отличить даже регулярную динамику системы F^m от хаотической, в частности, на множествах M_p, $p > n^2$, становится проблематично.

[1] Панкратова И.Н. // Дифференц. уравнения. —- 2009. —- **45**, N 1.