Украинский математический конгресс – 2009

И.В. Орлов, Ф.С. Стонякин (Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина)

Компактные характеристики отображений в ЛВП и их приложения

Аннотация

Для отображений отрезка в ЛВП введены и исследованы компактные характеристики, связанные с разложением пространства значений в шкалу банаховых подпространств, порожденных компактами. Рассмотрены приложения к интегралу Бохнера, теореме Банаха–Зарецкого, свойству Радона–Никодима.

Содержание

Введение

Мы рассматриваем как многозначные (компактные), так и скалярные (зависящие от компакта) аналоги ряда классических понятий теории меры и интеграла.

Цель работы, помимо описания конкретных результатов, состоит также в демонстрации пользы сочетания методов выпуклого (многозначного) и классического функционального анализа в локально выпуклых пространствах (ЛВП).

Первые два раздела описывают (в тезисной форме) выпуклые компактные характеристики отображений отрезка в ЛВП, третий раздел описывает их сильные компактные характеристики.

Результаты 1-го раздела опубликованы в [1] и выходящей вскоре статье [2]. Результаты 2-го и 3-его разделов готовятся к публикации. В тезисной форме результаты 2-го раздела опубликованы в [3].

Объединяющей идеей конструкций компактных характеристик во всех разделах является разложение основного пространства в индуктивную шкалу банаховых подпространств, порожденных абсолютно выпуклыми компактами, и градация основных понятий по этой шкале. Та же идея, но уже в области определения отображений, послужила базой построения теории компактных экстремумов вариационных функционалов (см. обзор [4] и диссертацию [5]). Рамки доклада, однако, не позволяют включить этот материал. См. также представленные в программе тезисы докладов Ф.С. Стонякина и Е.В. Божонок.

1 Компакные субдифференциалы и компактная вариация с приложениями к интегралу Бохнера

1.1 Выпуклые и компактные субдифференциалы

Введем вначале понятие проективного выпуклого предела убывающей системы замкнутых выпуклых множеств в ЛВП.

Определение 1.1.1. Пусть $\{B_t\}_{t\in T}$—индуктивно упорядоченная противоположно включению система замкнутых выпуклых подмножеств вещественного ЛВП E. Множество $B = \bigcap\limits_{t\in T} B_t$ назовем (проективным) *выпуклым пределом* системы $\{B_t\}_{t\in T}$, если для любой окрестности нуля $U \subset E$ найдется такое $t_U \in T$, что

$$(t \succeq t_U) \Rightarrow (B \subset B_t \subset B + U).$$

Если при этом B ограничено, назовем его B*–пределом*; если B компактно—K*–пределом.* Соответствующие обозначения:

$$B = co - \varprojlim_{t\in T} B_t; \quad B = B - \varprojlim_{t\in T} B_t; \quad B = K - \varprojlim_{t\in T} B_t.$$

Перейдем к определению субдифференциалов. Всюду далее $F : I \to E$, где $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$, E—вещественное ЛВП, $\overline{co}$—замкнутая выпуклая оболочка, mes^w—слабая нулевая мера.

Определение 1.1.2. Пусть $x \in I$, $h > 0$. Введем *частный выпуклый субдифференциал* F в точке x:

$$\partial^{co}F(x,h) = \overline{co}\left\{F(x+\widetilde{h}) - F(x)/\widetilde{h} \;\middle|\; 0 < |\widetilde{h}| < h\right\}.$$

Если существует предел:

$$\partial^{co}F(x) := co - \lim_{\overleftarrow{h \to 0}} \partial^{co}F(x,h),$$

назовем его *выпуклым субдифференциалом* F в точке x. Если при этом $\partial^{co}F(x)$ ограничен (компактен), назовем его *ограниченным (компактным) субдифференциалом* и обозначим cоответственно $\partial_B F(x)$ $(\partial_K F(x))$. Таким образом,

$$\partial_B F(x) := B - \lim_{\overleftarrow{h \to 0}} \partial^{co}F(x,h); \quad \partial_K F(x) := K - \lim_{\overleftarrow{h \to 0}} \partial^{co}F(x,h).$$

Отметим *общие свойства* K–субдифференцируемых отображений.

Теорема 1.1.1. *F дифференцируемо в точке $x \Leftrightarrow \partial_K F(x)$ одноточечный.*

Теорема 1.1.2. $\partial_K(F_1 + F_2)(x) \subset \partial_K F_1(x) + \partial_K F_2(x)$.

(Заметим, что без компактности хотя бы одного из двух субдифференциалов важное свойство субаддитивности может не выполняться).

Теорема 1.1.3. $\big(F : I \to E_1,\ A \in L(E_1; E_2)\big) \Rightarrow \big(\partial_K(A \circ F)(x) = A(\partial_K F(x))\big)$.

Теорема 1.1.4. $\big((F_1, F_2) : I \to E_1 \times E_2\big) \Rightarrow \big(\partial_K(F_1, F_2)(x) \subset \partial_K F_1(x) \times \partial_K F_2(x)\big)$.

Приведем также формулировку *обобщенной теоремы о среднем* для K–субдифференциалов (перенос на K–случай теоремы о среднем из [6]).

Теорема 1.1.5. *Если F непрерывно на I, K–субдифференцируемо на $I \setminus e$, где $mes^w F(e) = 0$, то*

$$\frac{F(b) - F(a)}{mes(I \setminus e)} \in \overline{co}\ \partial_K F(I \setminus e). \tag{1}$$

Если, в частности, $mes\, e = 0$, то оценка принимает стандартный вид

$$(F(b) - F(a)/b - a) \in \overline{co}\ \partial_K F(I \setminus e). \tag{2}$$

Отметим, что в ([2], теор. 5.10–5.11) подробно исследован важный случай, когда выпуклые оценки (1)–(2) не требуют замыкания.

1.2 Выпуклая и компактная вариация

Здесь также введем вначале понятие индуктивного выпуклого предела возрастающей системы замкнутых выпуклых множеств в ЛВП.

Определение 1.2.1. Пусть $\{B_t\}_{t\in T}$—индуктивно упорядоченная по включению система замкнутых выпуклых подмножеств вещественного ЛВП E. Множество $B = \overline{\bigcup_{t\in T} B_t}$ назовем (индуктивным) *выпуклым пределом* системы $\{B_t\}_{t\in T}$, если для любой окрестности нуля $U \subset E$ найдется такое $t_U \in T$, что

$$(t \succeq t_U) \Rightarrow (B_t \subset B \subset B_t + U).$$

Если при этом B ограничено (компактно), назовем его B*–пределом* (K*–пределом*). Соответствующие обозначения:

$$B = co - \varinjlim_{t\in T} B_t; \quad B = B - \varinjlim_{t\in T} B_t; \quad B = K - \varinjlim_{t\in T} B_t.$$

Перейдем к определению вариаций. Мы сохраняем обозначения п. 1.1; $\omega(A) = \overline{co}(A - A)$—*колебание* множества $A \subset E$.

Определение 1.2.2. Для разбиения P: $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, $P \in \mathcal{P}$, введем *частную выпуклую вариацию*

$$V^{co}(F, P) = \sum_{k=1}^{n} \omega F(I_k).$$

Полная выпуклая вариация F есть

$$V^{co}(F) := \overline{\bigcup_{P\in\mathcal{P}} V^{co}(F, P)}.$$

Если при этом $V^{co}(F)$ ограничена (компактна), назовем F *отображением с ограниченной (компактной) вариацией* и будем писать соответственно

$$F \in V_B(I, E); \quad F \in V_K(I, E).$$

Отметим *общие свойства* отображений с выпуклой и компактной вариацией. Далее $V^s_{\|\cdot\|}(F)$—обычная сильная вариация F для заданной полунормы $\|\cdot\|$ в E, $V^w(I, E)$—класс отображений со слабой ограниченной вариацией.

Теорема 1.2.1. *Для любой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ на E верно:*

$$\sup \|V^{co}(F)\| \le V^s_{\|\cdot\|}(F).$$

В частности, если E банахово, то $(V^s(F) < \infty) \Rightarrow (F \in V_B(I, E))$. Если же $\dim E < \infty$, то $V_B(I, E) = V_K(I, E) = V^s(I, E) = V^w(I, E)$.

Теорема 1.2.2. *При $I = I_1 \bigcup I_2$ верно:*

$$V^{co}(F) = V^{co}(F\big|_{I_1}) + V^{co}(F\big|_{I_2}).$$

В частности, $(F \in V_K(I, E)) \Leftrightarrow (F\big|_{I_k} \in V_K(I_k, E),\ \ k = 1, 2)$.

Теорема 1.2.3. $(F \in V_K(I,E)) \Rightarrow (V^{co}(F) = K - \varinjlim_{P\in\overrightarrow{\mathcal{P}}} V^{co}(F,P))$.

Теорема 1.2.4. *$(F \in V_K(I,E)$, F непрерывно на $I) \Rightarrow$*

$$V^{co}(F) = K - \varinjlim_{\lambda(P)\to 0} V^{co}(F,P).$$

(Здесь $\lambda(P)$—шаг разбиения P).

Заметим в заключение, что отображения класса V_K могут быть нигде не K–субдифференцируемы ([1]).

1.3 Описание неопределенного интеграла Бохнера в терминах K–субдифференциалов и K–вариации

Мы сохраняем обозначения предыдущих пунктов; $(B)\int$—интеграл Бохнера. В случае пространств Фреше удается получить критерий, обобщающий известный критерий для банаховых пространств.

Теорема 1.3.1. *Пусть E—пространство Фреше, $F : I \to E$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

i) F—неопределенный интеграл Бохнера, т.е.

$$F(x) = F(a) + (B)\int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b);$$

ii) F сильно абсолютно непрерывно и п.в. K–субдифференцируемо на I.

iii) F сильно абсолютно непрерывно и п.в. дифференцируемо на I.

В общем случае K–субдифференцируемость приводит к достаточному условию, а K–вариация—к необходимому условию.

Теорема 1.3.2. *Пусть E—вещественное ЛВП, $F : I \to E$. Если F сильно абсолютно непрерывно и п.в. K–субдифференцируемо на I, то F—неопределенный интеграл Бохнера.*

Теорема 1.3.3. *Пусть E—полное вещественное ЛВП, $F : I \to E$. Если F—неопределенный интеграл Бохнера, то $F \in V_K(I,E)$.*

2 Компактная абсолютная непрерывность и компактное N–свойство Лузина с приложениями к K–аналогу теоремы Банаха–Зарецкого

2.1 Выпуклая и компактная абсолютная непрерывность

Вначале введем вспомогательные обозначения и понятия

Определение 2.1.1. Пусть $\{A_k\}$—конечная или счетная система абсолютно выпуклых (а.в.) подмножеств векторного пространства E. Обозначим

$$\bigoplus_k A_k = \bigcup_N \left(\sum_{k=1}^{N} A_k \right).$$

Иначе говоря, мы рассматриваем множество всех *конечных* сумм элементов из различных A_k.

Определение 2.1.2. Далее E_B—подпространство $spanB \subset E$, порожденное а.в. ограниченным подмножеством $B \subset E$, с нормой $\| \cdot \|_B$, порожденной B.

Отметим, что вложение $E_B \hookrightarrow E$ при ограниченном B непрерывно, а при компактном B—компактно, причем E_B—банахово. В случае банахова пространства E, как показано в ([6]), $E = \varinjlim E_C$, где C—всевозможные а.в. компакты в E.

Перейдем к основному определению

Определение 2.1.3. Назовем отображение $F : I \to E$ *выпукло абсолютно непрерывным* ($F \in AC^{co}(I, E)$), если для любой окрестности нуля $U \subset E$ найдется такое $\delta_U > 0$, что для любой дизъюнктной системы интервалов $\{I_k\}$ в I:

$$\left(\sum_k mesI_k < \delta_U \right) \Rightarrow \left(\bigoplus_k \omega F(I_k) \subset U \right).$$

В частности, F *B–абсолютно непрерывно*, если $F : I \to F(a) + E_B$ для некоторого ограниченного а.в. $B \subset E$, причем $F \in AC^{co}(I, E_B)$; F *K–абсолютно непрерывно*, если $F : I \to F(a) + E_C$ для некоторого компактного а.в. $C \subset E$, причем $F \in AC^{co}(I, E_C)$. Соответствующие классы отображений обозначим соответственно $AC_B(I, E)$ и $AC_K(I, E)$.

Ясно, что $AC_K(I, E) \subset AC_B(I, E) \subset AC^{co}(I, E)$. Приведенные ниже *общие свойства* отображений класса AC^{co} очевидным образом переносятся на классы AC_B и AC_K. Далее AC^s и AC^w, соответственно—сильная и слабая абсолютная непрерывность.

Теорема 2.1.1. *$AC^s(I, E) \subset AC^{co}(I, E) \subset AC^w(I, E)$. В случае $\dim E < \infty$ эти классы совпадают.*

Теорема 2.1.2. *Класс $AC^{co}(I, E)$—линейный.*

Теорема 2.1.3. *$(F \in AC^{co}(I, E_1),\ A \in \mathcal{L}_{Hom}(E_1, E_2)) \Rightarrow (A \circ F \in AC^{co}(I, E_2))$.*

Теорема 2.1.4. *$(F_i \in AC^{co}(I, E_i),\ i = 1, 2) \Rightarrow ((F_1, F_2) \in AC^{co}(I, E_1 \times E_2))$.*

Теорема 2.1.5. *$(F \in AC^{co}(I_1 \bigcup I_2, E)) \Leftrightarrow (F\big|_{I_k} \in AC^{co}(I_k, E),\ \ k = 1, 2)$.*

Отметим также связь выпуклой абсолютной непрерывности и выпуклой вариации. Эти результаты можно рассматривать как первый шаг на пути к выпуклому аналогу теоремы Банаха–Зарецкого.

Теорема 2.1.6. *$(F \in AC^{co}(I, E)) \Rightarrow (F \in V_B(I, E))$.*
В частности, $(F \in AC_K(I, E)) \Rightarrow (F \in V_K(I, E))$.

2.2 Выпуклая и компактная мера нуль

Следующим шагом, необходимым для построения выпуклого аналога N–свойства Лузина, является определение выпуклой меры нуль.

Определение 2.2.1. Пусть E—вещественное ЛВП, $D \subset E$. Скажем, что D имеет *нулевую выпуклую меру*: $mes^{co}(D) = 0$, если для любой окрестности нуля $U \subset E$ найдется такое конечное или счетное открытое покрытие $D \subset \bigcup\limits_k U_k$ такое, что

$$\bigoplus_k \omega(U_k) \subset U.$$

В частности, $mes_B(D) = 0$, если $mes^{co}(D) = 0$ в некотором $E_B \subset E$ (где B ограничено, а.в.), $mes_K(D) = 0$, если $mes^{co}(D) = 0$ в некотором $E_C \subset E$ (где C компактно, а.в.).

Ясно, что $(mes_K(D) = 0) \Rightarrow (mes_B(D) = 0) \Rightarrow (mes^{co}(D) = 0)$.

Приведенные ниже *общие свойства* $mes^{co} = 0$ очевидным образом переносятся на случаи $mes_B = 0$ и $mes_K = 0$. Далее mes^w—слабая нулевая мера.

Теорема 2.2.1. $(mes^{co}(D) = 0) \Rightarrow (mes^w(D) = 0)$. *В частности, при* $\dim E < \infty$ *оба условия равносильны.*

Теорема 2.2.2. *Система* $\{D \subset E \,\big|\, mes^{co}(D) = 0\}$ *образует в* E *полное* σ*–кольцо.*

Теорема 2.2.3. $(mes^{co}(D_i) = 0$ *в* E_i, $i = 1, 2) \Rightarrow (mes^{co}(D_1 \times D_2) = 0$ *в* $E_1 \times E_2)$.

Отметим, что примеры множеств нулевой выпуклой и компактной меры легко доставляют теоремы следующего пункта.

2.3 Выпуклое и компактное N–свойство Лузина

Как известно, классическое N–свойство Лузина для функции $F : I \to \mathbb{R}$ есть условие $(mesD = 0) \Rightarrow (mesF(D) = 0)$. Замена последней меры на выпуклую приводит к выпуклому аналогу N–свойства для $F : I \to E$, E—вещественное ЛВП.

Определение 2.3.1. F обладает *выпуклым* N*–свойством Лузина* $(F \in N^{co}(I, E))$, если

$$(D \subset I,\ mes\, D = 0) \Rightarrow (mes^{co} F(D) = 0).$$

Заменяя последнее условие на $mes_B F(D) = 0$, либо $mes_K F(D) = 0$, приходим, соответственно, к классам Лузина $N_B(I, E)$ и $N_K(I, E)$.

Ясно, что $N_K(I, E) \subset N_B(I, E) \subset N^{co}(I, E)$. Приведенные ниже *общие свойства* N^{co} очевидным образом переносятся на классы N_B и N_K.

Теорема 2.3.1. $(F_i \in N^{co}(I, E_i),\ i = 1, 2) \Rightarrow ((F_1, F_2) \in N^{co}(I, E_1 \times E_2))$.

Теорема 2.3.2. $(F \in AC^{co}(I, E)) \Rightarrow (F \in N^{co}(I, E))$.

Следствие 2.3.1. $(F \in AC^{co}(I,E)) \Rightarrow$ (F *непрерывно,* $F \in V_B(I,E)$*,* $F \in N^{co}(I,E)$).

Последний результат является вторым важным шагом на пути к выпуклому аналогу теоремы Банаха–Зарецкого.

Простые примеры предыдущих классов легко строить с помощью выпуклого условия Липшица. Далее $\mathcal{L}ip^s$—обычное сильное условие Липшица.

Определение 2.3.2. $F \in \mathcal{L}ip_B(I,E)$, если $F \in \mathcal{L}ip^s(I,E_B)$ для некоторого ограниченного а.в. $B \subset E$; $F \in \mathcal{L}ip_K(I,E)$, если $F \in \mathcal{L}ip^s(I,E_C)$ для некоторого компактного а.в. $C \subset E$.

Здесь также $\mathcal{L}ip_K(I,E) \subset \mathcal{L}ip_B(I,E)$. Приведем *общие свойства* для класса $\mathcal{L}ip_K$.

Теорема 2.3.3. $(F \in \mathcal{L}ip_K(I,E)) \Rightarrow (F \in AC_K(I,E)) \Rightarrow (F \in N_K(I,E))$.

Теорема 2.3.4. $(F \in \mathcal{L}ip_K(I,E)) \Rightarrow (F \in \mathcal{L}ip^s(I,E))$. *В случае* $\dim E < \infty$ *оба условия равносильны.*

Теорема 2.3.5. *Класс* $\mathcal{L}ip_K(I,E)$*—линейный.*

Теорема 2.3.6. $(F_i \in \mathcal{L}ip_K(I,E_i),\ i = 1,2) \Rightarrow ((F_1,F_2) \in \mathcal{L}ip_K(I,E_1 \times E_2))$.

Теорема 2.3.7. $(F \in C^1(I,E)) \Rightarrow (F \in \mathcal{L}ip_K(I,E))$.

Отметим важное *свойство K–субдифференцируемости* отображений класса $\mathcal{L}ip_K$ (отсутствующее у классов AC_K и V_K).

Теорема 2.3.8. $(F \in \mathcal{L}ip_K(I,E)) \Rightarrow$ (F *всюду на* I K*–субдифференцируемо*).

Заметим, что отображения класса $\mathcal{L}ip^s$ могут быть нигде не K–субдифференцируемы ([1]).

2.4 Выпуклый и компактный аналоги теоремы Банаха–Зарецкого

Как известно, классическая теорема Банаха–Зарецкого для функции $F : I \to \mathbb{R}$ утверждает равносильность абсолютной непрерывности и суммы условий непрерывности, ограниченной вариации и N–свойства Лузина. Оказывается, для выпуклого аналога теоремы результат "раздваивается" в силу различия B–вариации и K–вариации.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $F : I \to E$*, где* E*—вещественное ЛВП. Тогда:*

i) Если $F \in AC^{co}(I,E)$*, то* F *непрерывно,* $F \in V_B(I,E)$ *и* $F \in N^{co}(I,E)$).

ii) Обратно, если F *непрерывно,* $F \in V_K(I,E)$ *и* $F \in N^{co}(I,E)$)*, то* $F \in AC^{co}(I,E)$.

Можно показать на примере, что совокупность условий п. (i) недостаточна для выпуклой абсолютной непрерывности. Однако в ряде случаев результату теоремы 2.4.1 можно придать замкнутую форму.

Первый, очевидный, случай—когда E *ограниченно компактное* (в частности, *монтелевское*) ЛВП. В этом случае $AC_B = AC_K$, $V_B = V_K$, $\mathcal{L}ip_B = \mathcal{L}ip_K$, $(mes_B(D) = 0) \Leftrightarrow (mes_K(D) = 0)$.

Теорема 2.4.2. *Пусть $F : I \to E$, где E—ограниченно компактное ЛВП. Тогда $(F \in AC^{co}(I, E)) \Leftrightarrow (F$ непрерывно, $F \in V_K(I, E)$, $F \in N^{co}(I, E))$.*

Во втором случае выделим еще один важный класс пространств.

Определение 2.4.1. Будем говорить, что ЛВП E обладает *свойством K_{ap} компактной аппроксимации* ($E \in K_{ap}$), если для любого а.в. компакта $C \subset E$ найдется такой а.в. компакт $C' \subset E$, что вложение $E_C \hookrightarrow E_{C'}$ компактно.

Конкретные примеры пространств со свойством K_{ap} доставляет

Теорема 2.4.3. *Пространства l_p $(1 \le p \le \infty)$ и пространство c_0 обладают свойством K_{ap}.*

Для пространств со свойством K_{ap} справедлив точный компактный аналог критерия Банаха–Зарецкого.

Теорема 2.4.4. *Пусть $F : I \to E$, где E обладает свойством K_{ap}. Тогда $(F \in AC_K(I, E)) \Leftrightarrow (F$ непрерывно, $F \in V_K(I, E)$, $F \in N_K(I, E))$.*

3 Сильная компактная вариация и сильная компактная абсолютная непрерывность с приложениями к K–аналогу свойства Радона–Никодима

3.1 Сильная компактная вариация

Мы по-прежнему рассматриваем отображения $F : I \to E$ вещественного отрезка $I = [a; b]$ в вещественное ЛВП E. Далее $\mathcal{C}(E)$—система всех а.в. компактов $C \subset E$, $E_C = (span\, C, \|\cdot\|_C)$—банаховы пространства, порожденные $C \in \mathcal{C}(E)$, при этом вложения $E_C \hookrightarrow E$ компактны и, когда E—банахово, $E = \varinjlim_{C \in \mathcal{C}(E)} E_C$. Через $V^s(I, E)$ обозначим класс отображений с обычной конечной сильной вариацией (относительно непрерывных полунорм на E), $V^w(I, E)$—класс отображений со слабой конечной вариацией.

Определение 3.1.1. Отображение F имеет *сильную компактную вариацию на I* ($F \in V^s_K(I, E)$), если найдется такое $C \in \mathcal{C}(E)$, что $F : I \to F(a) + E_C$, и при этом $F \in V^s(I, E_C)$.

Отметим *общие свойства* отображений класса V_K^s.

Теорема 3.1.1. *Справедливы включения* $V_K^s(I,E) \subset V^s(I,E) \subset V^w(I,E)$. *В случае* $\dim E < \infty$ *эти классы совпадают.*

Теорема 3.1.2. *Класс* $V_K^s(I,E)$*—линейный.*

Теорема 3.1.3. $(F \in V_K^s(I,E_1),\ A \in L(E_1,E_2)) \Rightarrow (A \circ F \in V_K^s(I,E_2))$.

Теорема 3.1.4. $(F \in V_K^s(I_1 \bigcup I_2, E)) \Leftrightarrow (F\big|_{I_k} \in V_K^s(I_k,E),\ \ k=1,2)$.

Теорема 3.1.5. $((F_1,F_2) \in V_K^s(I,E_1 \times E_2)) \Leftrightarrow (F_i \in V_K^s(I,E_i),\ i=1,2)$.

Теорема 3.1.6. $(F_i \in V_K^s(I,E_i),\ i=1,2,\ B \in L(E_1,E_2;E_3)) \Rightarrow$
$(B(F_1,F_2) \in V_K^s(I,E_3))$. *При этом для* $C_i \in \mathcal{C}(E_i),\ i=1,2:$

$$V^s_{B(C_1\times C_2)}(B(F_1,F_2)) \le \sup_{x\in I}\|F_1(x)\|_{E_{C_1}} \cdot V^s_{E_{C_2}}(F_2) + \sup_{x\in I}\|F_2(x)\|_{E_{C_2}} \cdot V^s_{E_{C_1}}(F_1).$$

Теорема 3.1.7. $(E_{C_1} \subset E_{C_2};\ C_1, C_2 \in \mathcal{C}(E)) \Rightarrow (V^s_{E_{C_2}}(F) \le M_{12} \cdot V^s_{E_{C_1}}(F))$. *(Здесь* $M_{12} < \infty$ *и зависит только от* C_1 *и* C_2*).*

Свойство сильной K–вариации сильнее свойства выпуклой K–вариации.

Теорема 3.1.8. $V_K^s(I,E) \subset V_K(I,E)$. *При этом для* $C \in \mathcal{C}(E)$ *верно:*

$$V_{K,E_C}(F) \subset V^s_{E_C}(F) \cdot C.$$

Существуют примеры отображений класса V_K, не принадлежащих классу V_K^s.

Существенный момент—K–субдифференцируемость п.в. отображений класса V_K^s (в отличие от класса V_K).

Теорема 3.1.9. $(F \in V_K^s(I,E)) \Rightarrow$$(F$ *K–субдифференцируемо п.в. на* $I)$.

3.2 Сильная компактная абсолютная непрерывность

Мы сохраняем обозначения п. 3.1. Через $AC^s(I,E)$ обозначим класс обычных сильно абсолютно непрерывных отображений (относительно непрерывных полунорм на E), $AC^w(I,E)$—класс слабо абсолютно непрерывных отображений.

Определение 3.2.1. Отображение $F: I \to E$ *сильно компактно абсолютно непрерывно на* I $(F \in AC_K^s(I,E))$, если найдется такое $C \in \mathcal{C}(E)$, что $F: I \to F(a) + E_C$, и при этом $F \in AC^s(I,E_C)$.

Отметим *общие свойства* отображений класса AC_K^s, по аналогии со свойствами отображений класса V_K^s.

Теорема 3.2.1. *Справедливы включения* $AC_K^s(I,E) \subset AC^s(I,E) \subset AC^w(I,E)$. *В случае* $\dim E < \infty$ *эти классы совпадают.*

Теорема 3.2.2. *Класс* $AC_K^s(I,E)$*—линейный.*

Теорема 3.2.3. *$(F \in AC^s_K(I, E_1),\ A \in L(E_1, E_2)) \Rightarrow (A \circ F \in AC^s_K(I, E_2))$.*

Теорема 3.2.4. *$(F \in AC^s_K(I_1 \bigcup I_2, E)) \Leftrightarrow (F\big|_{I_k} \in AC^s_K(I_k, E),\ \ k = 1, 2)$.*

Теорема 3.2.5. *$((F_1, F_2) \in AC^s_K(I, E_1 \times E_2)) \Leftrightarrow (F_i \in AC^s_K(I, E_i),\ i = 1, 2)$.*

Теорема 3.2.6. *$(F_i \in AC^s_K(I, E_i),\ i = 1, 2,\ B \in L(E_1, E_2; E_3)) \Rightarrow$ $(B(F_1, F_2) \in AC^s_K(I, E_3))$.*

Теорема 3.2.7. *$(E_{C_1} \subset E_{C_2};\ C_1,\, C_2 \in \mathcal{C}(E),\ F \in AC^s(I, E_{C_1})) \Rightarrow (F \in AC^s(I, E_{C_2}))$.*

Имеет место частичное обращение теоремы 3.2.1

Теорема 3.2.8. *Пусть E—банахово пространство, $E^*_\sigma = (E^*, \sigma(E^*, E))$. Тогда*

$$AC^s_K(I, E^*_\sigma) = AC^s(I, E^*).$$

Свойство сильной K–абсолютной непрерывности сильнее свойства выпуклой K–абсолютной непрерывности.

Теорема 3.2.9. *$AC^s_K(I, E) \subset AC_K(I, E)$.*

Существенный момент—связь сильной K–абсолютной непрерывности и сильной K–вариации.

Теорема 3.2.10. *$(F \in AC^s_K(I, E)) \Rightarrow (F \in V^s_K(I, E))$.*

Отсюда вытекают следующие два результата.

Теорема 3.2.11. *$(F \in AC^s_K(I, E)) \Rightarrow (F$ K–субдифференцируемо п.в. на $I)$.*

Теорема 3.2.12. *Пусть E отделимое ЛВП. Тогда $(F \in AC^s_K(I, E)) \Leftrightarrow (F \in V^s_K(I, E)$ и $F \in AC^w(I, E))$.*

Как следствие, получаем еще один K–аналог теоремы Банаха–Зарецкого.

Теорема 3.2.13. *$(F \in AC^s_K(I, E)) \Leftrightarrow (F$ непрерывно, $F \in V^s_K(I, E)$ и $F \in N^w(I, E))$.*

Заметим, в заключение этого пункта, что по образцу определения 3.2.1 можно ввести класс *сильно K–липшицевых отображений* $\mathcal{L}ip^s_K(I, E)$. Однако нетрудно видеть, что классы $\mathcal{L}ip^s_K$ и $\mathcal{L}ip_K$ совпадают.

Теорема 3.2.14. *$\mathcal{L}ip_K(I, E) = \mathcal{L}ip^s_K(I, E) \subset AC^s_K(I, E)$.*

3.3 Компактный аналог свойства Радона–Никодима

В случае пространств Фреше, из теорем 3.1.1 и 3.1.9 в сочетании с критерием интегрируемости по Бохнеру ([1], Th.3.2) легко следует связь сильной K–абсолютной непрерывности с неопределенным интегралом Бохнера.

Теорема 3.3.1. *Пусть E—пространство Фреше. Если $F \in AC^s_K(I,E)$, то F—неопределенный интеграл Бохнера, т.е.*

$$F(x) = F(a) + (B)\int\limits_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b). \tag{3}$$

Более общий результат справедлив для любых вещественных ЛВП.

Теорема 3.3.2. $F \in AC^s_K(I,E)$ *тогда и только тогда, когда:*

i) F*—неопределенный интеграл Бохнера, т.е. выполнено* (3)*;*

ii) $\int\limits_a^b \|f(x)\|_{E_C}dx < \infty$ *для некоторого* $C \in \mathcal{C}(E)$.

Таким образом, обозначая через $\mathcal{I}_B(I,E)$ класс неопределенных интегралов Бохнера, имеем:

$$AC^s_K(I,E) \subset \mathcal{I}_B(I,E) \subset AC^s(I,E). \tag{4}$$

Как известно, E обладает свойством Радона–Никодима ($E \in (RNP)$), если $\mathcal{I}_B = AC^s$ в (4). Введем K–аналог свойства (RNP), приравнивая в (4) $\mathcal{I}_B = AC^s_K$.

Определение 3.3.1. ЛВП E обладает *K–свойством Радона–Никодима* ($E \in (RNP)_K$), если

$$AC^s_K(I,E) = \mathcal{I}_B(I,E).$$

Уже рассмотренные ранее в теореме 2.4.3 пространства обладают таким свойством.

Теорема 3.3.3. *Пространства l_p $(1 \le p \le \infty)$ и c_0 обладают K–свойством Радона–Никодима.*

Отметим, что при этом l_∞ и c_0 не обладают классическим (RNP).

Следствие 3.3.1. $AC^s_K(I,E) = AC^s(I,E)$ *тогда и только тогда, когда E одновременно обладает свойством (RNP) и $(RNP)_K$.*

Таким, например, являются пространства l_p $(1 \le p < \infty)$.

Список литературы

[1] Orlov I.V. and Stonyakin F.S. Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bocher integral // Meth. of Funct. Anal. & Top. — 2009. — Vol. 15, no.1. —P. 74–90.

[2] Орлов И.В., Стонякин Ф.С. Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // Современная матем. Фундам. напр. — 2009. — в печати.

[3] Орлов И.В. Теорема Банаха–Зарецкого для компактно абсолютно–непрерывных отображений // Междунар. конф. "Совр. проблемы матем., мех. и их прилож.": Материалы конференции. — М.: МГУ, 2009. —С. 39–40.

[4] Orlov I.V. Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals // Operator Theory: Advances & Appl. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser., 2009. — Vol. 190. —P. 397–417.

[5] Божонок Е.В. Компактные экстремумы и компактно–аналитические свойства основного вариационного функционала в пространстве Соболева W_2^1: дисс. . . канд. физ.–мат. наук: 01.01.02. —Симферополь, 2009. —161 с.

[6] Орлов И.В. Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств // Матем. физ., анализ, геом. (МАГ). — 2001. —Т. 8, № 4. —С. 12–24.

[7] Орлов И.В. Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы // Современная матем. Фундам. напр. — 2007. — Т. 29. —С. 165–175.