М.І. Сєров, О.М. Омелян (Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна)

Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції дифузії

Шляхом застосування класичного алгоритму Лі досліджено галілеївську інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції дифузії.

Для випадку двох незалежних змінних t, x система нелінійних рівнянь реакції дифузії може бути записана у вигляді:

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + G(U), \tag{1}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$ $u^a = u^a(t,x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ - довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

Система рівнянь вигляду (1) широко застосовується для описання багатьох фізичних, хімічних процесів та явищ природи, пов'язаних з реакцією речовин під час їх взаємної дифузії. Зокрема, для описання процесу горіння плазми, а в живій природі - для описання конкуренції тварин на певній території.

В роботі [1] повністю розв'язана задача класифікації симетрійних властивостей рівняння

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x] + g(u), \tag{2}$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ - довільна гладка функція. З результатів роботи [1] зокрема випливає, що при $f(u) \neq const$ рівняння (2) неінваріантне відносно алгебри Галілея.

В даній роботі поставлено та розв'язано задачу знаходження систем нелінійних рівнянь вигляду (1), інваріантних відносно лінійного зображення алгебри Галілея з базисними генераторами вигляду:

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, G = t\partial_x + xQ_1, Q_1 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a} \tag{3}$$

та її розширень операторами масштабних:

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q_2 \tag{4}$$

та проективних

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + tQ_2 + \frac{x^2}{2}Q_1 \tag{5}$$

перетворень. В формулах (3 - 5) $Q_2 = (\gamma_{ab}u^b + \delta_a)\partial_{u^a}$; $\partial_{u^a} = \frac{\partial}{\partial u^a}$;
α_{ab}, β_a, γ_{ab}, δ_a – const; $a, b = 1, 2$.

Серед одержаних результатів наведемо наступний.

Теорема 1 *Система (1) при умові* $\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle \neq 0$, *де* $\langle 1\rangle = f^{11} + f^{22}, \langle 2\rangle = f^{11} \cdot f^{22} - f^{12} \cdot f^{21}$, *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (3-5) тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна системам:*

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 (\omega)^k \\ \lambda_4 u^2 (\omega)^k \end{pmatrix},$$

де $\omega = \frac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $k = \frac{4}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *- довільні сталі;*

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ k\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 (u^1)^5 e^{\frac{u^2}{u^1}} \\ (\lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1)(u^1)^4 e^{\frac{u^2}{u^1}} \end{pmatrix},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *- довільні сталі;*

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 (u^2)^2 \\ \varphi^2 \lambda_4 (u^2)^3 \end{pmatrix},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *- довільні сталі.*

[1] Dorodnitsyn V.A. On invariant solutions of non-linear heart conduction with a sourse // USSR Comput. Math. Math. Phys. —1982. —N 22, — P. 115-122.