О.А. Новиков, О.Г. Ровенская (Славянский государственный педагогический университет, г. Славянск, Украина)

Приближение аналитических периодических функций линейными средними рядов Фурье

В работе Степанца А.И. [1] введены классы (ψ,β)–дифференцируемых функций следующим образом. Пусть $f(\cdot)$ – суммируемая 2π-периодическая функция. Пусть, далее, $\psi(k)$ – произвольная функция натурального аргумента и β – произвольное действительное число. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}(a_k\cos(kx+\frac{\beta\pi}{2})+b_k\sin(kx+\frac{\beta\pi}{2}))$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $f_\beta^\psi(\cdot)$, то ее называют (ψ,β)-производной функции $f(\cdot)$. Множество всех непрерывных функций, обладающих (ψ,β)-производной, обозначается через C_β^ψ. Будем говорить, что $f\in C_\beta^\psi H_\omega$, если выполнено условие $|f_\beta^\psi(t')-f_\beta^\psi(t'')|\le\omega(|t'-t''|),\forall t',t''\in R$, где $\omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности. В случае, когда $\psi(k)=q^k, k=1,2,...,$ $q\in(0;1)$, класс $C_\beta^\psi H_\omega$ обозначим символом $C_\beta^q H_\omega$.

Пусть p_1,p_2,p_3 — произвольные натуральные числа такие, что $\Sigma_p=p_1+p_2+p_3<n$. Трехкратные суммы Валле-Пуссена определим следующим соотношением

$$V_{n,\overline{p}}^{(3)}(f;x)=\frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\frac{1}{p_3}\sum_{r=m-p_3+1}^{m}S_r(f;x).$$

Теорема. Пусть $q\in(0;1)$, $\beta\in R$ и $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности. Тогда при $n-p_1-p_2-p_3\to\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\mathcal{E}(C_\beta^q H_\omega;V_{n,\overline{p}}^{(3)})\stackrel{\mathrm{df}}{=}\sup_{f\in C_\beta^q H_\omega}||f(\cdot)-V_{n,\overline{p}}^{(3)}(f;x)||_C=\frac{2q^{n-\Sigma_p+1}(1+q^2)}{\pi p_1p_2p_3(1+q)(1-q)^3}e_{n-\Sigma_p-1}(\omega)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2\tau(n-\Sigma_p-1)^{-1})\sin\tau d\tau+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_p}}{p_1p_2p_3}\frac{\omega\left((n-\Sigma_p)^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)(1-q)^6}+\frac{q^{n-\Sigma_p}}{p_1p_2p_3(1-q)^3}\times\right.$$

$$\left.\times\left[q^{p_3}\omega\left((n-p_1-p_2)^{-1}\right)+q^{p_2}\omega\left((n-p_1-p_3)^{-1}\right)+q^{p_1}\omega\left((n-p_2-p_3)^{-1}\right)\right]\right),$$

где $e_{n-\Sigma_p-1}(\omega)=\theta_\omega\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2\tau(n-\Sigma_p-1)^{-1})\sin\tau d\tau$, $\theta_\omega\in[1/2;1]$, причем $\theta_\omega=1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности.

[1] Степанец А. И. Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сб. — **192** (2001), 113–138.