

Б.Б. Нестеренко (Інститут математики НАН України),  
 О.І. Пойда (Національний медичний університет ім. О.О. Богомольця),  
 М.А. Новотарський (Інститут математики НАН України)

## Математичне моделювання перистальтичних транспортних процесів

Перистальтичні транспортні процеси є надзвичайно важливими при забезпеченні життєдіяльності організму людини. Вони виникають практично в усіх випадках, пов'язаних з переміщенням рідин. Але найбільший інтерес представляють дослідження ролі перистальтичних коливань шлунково-кишкового тракту. Такі дослідження дозволяють не тільки розширити наше розуміння процесів травлення, але й значно підвищити ефективність оперативного втручання.

Класичні підходи до дослідження перистальтичних транспортних процесів [1] розглядають їх як стаціонарні процеси, що виникають в нескінченно-довгому циліндрі під впливом хвилеподібної деформації його поверхні, яка рівномірно змінюється в напрямку, паралельному осі циліндра. Сучасні дослідження руху рідин в шлунково-кишковому тракту свідчать про значно складніші рухи рідин в ньому [2]. Тому велику актуальність мають дослідження нестационарних перистальтичних процесів.

Для врахування змінної в'язкості вмісту кишечника та балансу всіх сил представимо математичну модель у загальному вигляді системою рівнянь:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot [\eta (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

де  $\eta$  – динамічна в'язкість,  $\rho$  – густина,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  – вектор швидкості,  $p$  – тиск,

$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  – вектор об'ємної сили.

Розв'язування даної системи будемо виконувати з урахуванням двох типів граничних умов, що описують відповідно стан рідини на зрізах циліндра скінченної довжини та стан циліндричної поверхні. З метою визначення залежності величини вхідного та вихідного потоків рідини від параметрів деформації поверхні циліндра застосуємо відкриті граничні умови на його зрізах. У цьому випадку рідина може вільно надходити та залишати циліндр за умови, що в'язкісна напружка на границі визначається з виразу:  $\eta (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \mathbf{n} = 0$ . Стінки циліндра рухаються з модулем швидкості  $u_n(z)$ , вектор якої співпадає з нормаллю до поверхні і складається з фрагментів стискання  $u_{n1}$  та розширення  $u_{n2}$ :

$$u_{n1}(z) = \begin{cases} U_{\max} (\cos(2\pi\omega z) - 1), & 0 < z \leq \frac{\pi}{2\omega}, \\ -2U_{\max} \sin(\pi\omega z), & \frac{\pi}{2\omega} < z \leq \frac{\pi}{\omega}, \end{cases} \quad u_{n2}(z) = \begin{cases} -2U_{\max} \sin(\pi\omega z), & \frac{\pi}{\omega} < z \leq \frac{3\pi}{2\omega}, \\ U_{\max} (1 - \cos(2\pi\omega z)), & \frac{3\pi}{2\omega} < z \leq \frac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Процес моделювання полягає в застосуванні просторово-часових змінних, що регулюють прискорення  $\frac{\partial u_{n1}}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u_{n2}}{\partial t}$  та зони зміни швидкості оболонки циліндра. Результати дослідження дозволили визначити нові властивості перистальтичних процесів у шлунково-кишковому тракту.

[1] Shapiro A. H., Jaffrin M. Y., Weinberg S. L. Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. - 1969. - vol. 37, № 4. – P.799-825.

[2] Жученко С.П., Жученко А.П., Костюк Г.Я., Нестеренко Б.Б. Исследование основ функционирования и разработка реконструктивных операций на полых органах пищеварительной системы методами математического моделирования. – Винница: Вингосмедуниверситет, 1996. –385 с.