

М.О.Недашковський (Національний економічний університет, Тернопіль, Україна)

Операторні ланцюгові дроби в комп'ютерній алгебрі.

Сучасна математика наука останні роки все частіше стикається з дослідженням нелінійних задач великої розмірності. Поряд з якісними методами дослідження це вимагає і виконання великого об'єму комп'ютерних обчислень. Для ефективного використання ресурсів обчислювальних систем можна успішно використовувати апарат матричних і операторних гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД).

Зокрема для нелінійних інтегральних рівнянь виду

$$X(u, v) = A(u, v) + \int_a^b \int_a^b X(u, \tau_1) B(\tau_1, \tau_2) X(\tau_2, v) d\tau_1 d\tau_2 \quad (1)$$

та

$$X(t) = f(t) + \int_0^b K_1(t, \tau) X(\tau) d\tau + \int_0^b \int_0^b K_2(t, \tau_1, \tau_2) X(\tau_1) X(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (2)$$

і для диференціальної моделі Вольтерра відносно чисельності популяцій

$$\frac{dN_i}{dt} = -N_i(t) [\varepsilon_i(t) + \gamma_i(t) N_j(t)] c_i(t), \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (3)$$

одержано розклад розв'язків у операторні гіллясті ланцюгові дроби виду

$$D = \overset{\infty}{D} \sum_{i=1}^n \frac{a_{k(i)}}{b_{k(i)}} \quad (4)$$

Тут $k_{(i)} = k_1 k_2 \dots k_i$ - скорочені позначення для мультиіндексів, $a_{k(i)}, b_{k(i)} \in X$ - це оператори пов'язані з в рівняннями (1), (2) і (3).

У вигляді матричних ГЛД можуть бути подані роз'язки дискретного рівняння Ріккати

$$A^T X A - X - A^T X B (R + B^T X B)^{-1} B^T X A + Q = 0.$$

та матричного поліномального рівняння загального вигляду

$$A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \dots + A_{n-1} X + A_n = 0. \quad (5)$$

Тут всі коефіцієнти A_i - $p \times p$ -матриці, дійсні або комплексні, X - шукана $p \times p$ -матриця.

Для кожного з цих розвинень у ГЛД вдалося одержати ефективні достатні умови збіжності виду

$$\|b_{k(s)}^{-1}\| \leq \frac{1}{\|a_{k(s)}\| + n} \quad \text{або ж} \quad \|b_{k(s)}^{-1}\| \leq \frac{1}{\|a_{k(s)}\| + n} \quad \text{для} \quad (1 \leq k_s \leq n; s = 1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Причому, якщо початкове наближення вибрано із множини збіжності відповідного ГЛД, то цей дріб збігається до розв'язку заданого рівняння.

Дослідження збіжності і обчислювальної стійкості матричних і операторних ланцюгових дробів та числові експерименти в MatLab підтверджують ефективність застосування такого підходу для розв'язання нелінійних систем алгебраїчних, диференціальних і інтегральних рівнянь.