М.Н. Нечепуренко, Г.Р. Торган (ЛНУ им. И. Франко, Львов, Украина)

О существовании обобщенного решения нелинейной эволюционной системы уравнений в неограниченной по времени области

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, $Q = \Omega\times(0,\infty)$. Рассмотрим в области Q смешанную задачу для системы уравнений с вещественнозначными коэффициентами

$$u_{tt}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i}(x,t))_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\theta_{x_i}(x,t) + d(x,t)u_t(x,t)+$$
$$+\,a(x,t)u(x,t) = c(x,t)|u(x,t)|^{p-2}u(x,t) + f_1(x,t), \tag{1}$$
$$\theta_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n}(d_{ij}(x,t)\theta_{x_i}(x,t))_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}(b_i(x,t)u_t(x,t))_{x_i} + b(x,t)\theta(x,t)+$$
$$+\,g(x,t)|\theta(x,t)|^{q-2}\theta(x,t) = f_2(x,t) \tag{2}$$

с начальными

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ x \in \Omega, \tag{3}$$

и краевыми условиями

$$u\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0, \quad \theta\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0. \tag{4}$$

Будем предполагать, что для коэффициентов системы (1) - (2) выполняются следующие условия.
($\mathbf{H_1}$): $\quad a_{ij},\ a_{ijt},\ a_{ijtt}, a,\ a_t \in L^\infty(Q),\ D^1a_{ij}(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega),\ i,j \in \{1,...,n\}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant A_1\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2,\ A_1 > 0,$$

для всех $\xi_i \in \mathbb{R}$ и почти всех $(x,t) \in Q$,

$$a(x,t) \geqslant A_0 > 0$$

почти для всех $(x,t) \in Q$,

$$a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$$

почти для всех $(x,t) \in Q$ и всех $i,j \in \{1,...,n\}$;
($\mathbf{H_2}$): $\quad b_i,\ b_{it},\ b,\ b_t \in L^\infty(Q),\ D^1b_i(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega),\ i \in \{1,...,n\}$,

$$b(x,t) \geqslant B_0 > 0$$

почти для всех $(x,t)\in Q$;
$(\mathbf{H_3})$: $c,\, c_t\in L^\infty(Q),\ c(x,t)\leqslant C_0,\ c_t(x,t)\leqslant\overline{C_0}$ почти для всех $(x,t)\in Q,\ C_0>0,\ \overline{C_0}>0$;
$(\mathbf{H_4})$: $d_{ij},\ d_{ijt},\ d,\ d_t\in L^\infty(Q),\ D^1d_{ij}(\cdot,0)\in L^\infty(\Omega),\ i,j\in\{1,...,n\}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n}d_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant D_1\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2,\ D_1>0,$$

для всех $\xi_i\in\mathbb{R}$ и почти всех $(x,t)\in Q$,

$$d(x,t)\geqslant D_0>0$$

почти для всех $(x,t)\in Q$,

$$d_{ij}(x,t)=d_{ji}(x,t)$$

почти для всех $(x,t)\in Q$ и всех $i,j\in\{1,...,n\}$;
$(\mathbf{H_5})$: $g,\ g_t\in L^\infty(Q),\ g(x,t)\geqslant g_0>0$ почти для всех $(x,t)\in Q$.

Теорема 1. Пусть для коэффициентов системы (1)-(2) выполняются условия $(\mathbf{H_1})$ - $(\mathbf{H_5})$ и, кроме того, $f_1,\ f_{1t},\ f_2,\ f_{2t}\in L^2(Q)$, $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2(p-1)}(\Omega),\ u_1\in L^2(\Omega),\ v\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2(q-1)}(\Omega),\ 2<p\leqslant\dfrac{2n}{n-2}$ при $n>2$ и $p>2$ при $n\in\{1,2\},\ q>2$. Тогда существует обобщенное решение задачи (1) - (4) в области Q_T $(0<T<\infty)$, зависящее от начальных данных и коэффициентов системы.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов системы (1)-(2) выполняются условия $(\mathbf{H_1})$ - $(\mathbf{H_5})$, и, кроме того, $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2(p-1)}(\Omega),\ u_1\in L^2(\Omega),\ \theta\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2(q-1)}(\Omega)$, $E(0)=-\lambda<0$, $2<p\leqslant\dfrac{n}{n-2}$ при $n>2$ и $p>2$ при $n\in\{1,2\},\ q>2$. Тогда не существует глобального обобщенного решения задачи (1)-(4).

В настоящей работе получены условия существования и единственности обобщенного решения. Показано не существование решения задачи при отрицательном начальном значении интеграла энергии. Данная работа обобщает результаты, полученные в [3].

[1] Apolaya R.F., Clark H.R., Feitosa A.J. On a nonlinear coupled system with internal damping // Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2000** (2000), No. 64, pp. 1-17.

[2] Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. -М., 1972.

[3] Nechepurenko M.O. The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in a bounded domain // Visnyk Lvivskogo Univ. Ser.Mech-Math. Vol. **67** (2007), pp. 207-223.