Мустапокулов Х. Я. (Национальный университет Узбекистана, Узбекистан)

Необходимые и достаточные условия инвариантности для задачи теплопроводности

Заметим в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ уравнение теплопроводности (см.[1], гл.I, §6)

$$z_t(x,t) = \Delta z(x,t) + u(x,t), \;\; x \in \Omega, \, t > 0 \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями

$$z(x,t) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \, t > 0, \quad z(x,0) = p(x), \;\; x \in \Omega.$$

Здесь $z : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to R$, $z \in C^{2,1}(\Omega \times (0,\infty)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$; $p(\cdot) \in D$, где

$$D = \{p(\cdot)| \;\; p(\cdot) \in L_2(\Omega), \, a(x,0) \le p(x) \le b(x,0), \, x \in \Omega, \, p(x) = 0, \, x \in \partial\Omega\},$$

$a(x,t) \le b(x,t)$ и $a(x,t) \cdot b(x,t) \le 0$ при всех $x \in \Omega$, $t \ge 0$, где $a(x,t)$, $b(x,t)$ непрерывные функции по совокупности переменных (x,t). Допустимыми управлениями являются измеримые функции вида $u : \Omega \times (0,\infty) \to [\alpha, \beta]$, где $\alpha \le \beta-$ действительные числа. Совокупность всех допустимых управлений обозначим через U, т.е.

$$U = \{u(\cdot,\cdot)| \;\; \alpha \le u(x,t) \le \beta, \, x \in \Omega, \, t > 0\}.$$

Определение 1. *Множество $D \subset L_2(\Omega)$ называется сильно инвариантным относительно системы (1), если для любых $p(\cdot) \in D$ и $u(\cdot,\cdot) \in U$ имеет место неравенство $a(x,t) \le z(x,t;p(\cdot),u(\cdot,\cdot)) \le b(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \ge 0$.*

Определение 2. *Множество $D \subset L_2(\Omega)$ называется слабо инвариантным относительно системы (1), если для любой $p(\cdot) \in D$ существует управление $u(\cdot,\cdot) \in U$ такое, что $a(x,t) \le z(x,t;p(\cdot),u(\cdot,\cdot)) \le b(x,t)$ при всех $x \in \Omega$, $t \ge 0$.*

Пусть функции $a(x,t)$ и $b(x,t)$ константы, т. е. $a(x,t) = a$ и $b(x,t) = b$.

Теорема 1. *Для того чтобы множество D было сильно инвариантным относительно системы (1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Big[\frac{\alpha}{\lambda_1}, \frac{\beta}{\lambda_1}\Big] \subset [a,b].$$

Теорема 2. *Для того множество D было слабо инвариантным относительно системы (1), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Big[\frac{\alpha}{\lambda_1}, \frac{\beta}{\lambda_1}\Big] \cap [a,b] \ne \emptyset.$$

[1] А. И. Егоров. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М: Наука. 1978.