М.А. Муратов, В.И. Чилин (Таврический национальный университет, Симферополь; Национальный университет Узбекистана, Ташкент)

(о)-топология в *-алгебрах измеримых операторов

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ — *-алгебры измеримых и локально измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов [2], [3], $t(\mathcal{M})$ — топология сходимости локально по мере в $LS(\mathcal{M})$, $t_h(\mathcal{M})$ — топология в $LS_h(\mathcal{M})$, индуцируемая топологией $t(\mathcal{M})$, $t_o(\mathcal{M})$ — (о)-топология в $LS_h(\mathcal{M})$.

Теорема 1. (i) $t_h(\mathcal{M}) \leq t_o(\mathcal{M})$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{M}$ имеет конечный тип;

(ii) $t_h(\mathcal{M}) = t_o(\mathcal{M})$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{M}$ — σ -конечная алгебра конечного типа.

Если $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M}, \tau)$ — *-алгебра τ -измеримых операторов, то обозначим через $t(\mathcal{M}, \tau)$ топологию в $S(\mathcal{M}, \tau)$, индуцируемую топологией $t(\mathcal{M})$ из $LS(\mathcal{M})$. Наряду с топологией $t(\mathcal{M}, \tau)$ в *-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ рассматривается топология t_τ сходимости по мере [1] и топологии $t_{\tau l}$ и $t_{w\tau l}$ τ -локальной и слабой τ -локальной сходимости по мере [4]. Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\tau = tr$, то топология $t_{\tau l}$ совпадает с сильной операторной топологией, а топология $t_{w\tau l}$ — со слабой операторной топологией.

Теорема 2. $t_{w\tau l} \leq t_{\tau l} \leq t(\mathcal{M}, \tau) \leq t_\tau$, причем все неравенства могут быть строгими.

Теорема 3. Следующие условия эквивалентны: (i) $t_{w\tau l} = t(\mathcal{M}, \tau)$; (ii) $t_{\tau l} = t(\mathcal{M}, \tau)$; (iii) $\mathcal{M}$ имеет конечный тип.

Обозначим через $t_{o\tau}(\mathcal{M})$ (о)-топологию в $S_h(\mathcal{M}, \tau)$, через $t_{h\tau}$ — сужение топологии t_τ на $S_h(\mathcal{M}, \tau)$, через $t_{h\tau l}$ (соответственно, $t_{hw\tau l}$) топологию в $S_h(\mathcal{M}, \tau)$, индуцируемую топологией $t_{\tau l}$ (соответственно, топологией $t_{w\tau l}$) из $S(\mathcal{M}, \tau)$.

Теорема 4. $t_{hw\tau l} \leq t_{h\tau l} \leq t_{o\tau}(\mathcal{M})$.

В случае $\tau(I) < \infty$, имеют место равенства $t_{hw\tau l} = t_{h\tau l} = t_{o\tau}(\mathcal{M}) = t_{h\tau}$. Если же $\tau(I) = \infty$, то равенство $t_{h\tau l} = t_{o\tau}(\mathcal{M})$ неверно даже в коммутативном случае.

- [1] Nelson E. Notes on non commutative integration — J. Funct. Anal.— 1974. — № 15.— p. 103–116.
 - [2] Segal I. E. A non-commutative extension of abstract integration — Ann. Math. — 1953. — № 57.— p. 401–457.
 - [3] Муратов М.А., Чилин И.И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. — Праці Ін-т. Матем. НАН України. — Київ: 2007. — 389 с.
 - [4] Бикчентаев А. М. Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана — Труды МИАН России. — 2006. — Т. 255. — с. 1–14.
-