Фахриддин Мирзоахмедов (Институт экономики Таджикистана, Душанбе, Таджикистан)

Квазиградиентный метод минимизации стохастической липщицевой функции

Доклад посвяшен обоснованию численного метода решения следующей задачи стохастического программирования [1]: найти x, минимизирующий функцию

$$F(x) = Mf(x,\omega) = \int_{\Omega} f(x,\omega)d\varphi(\omega), \tag{1}$$

при ограничении

$$x \in X \tag{2}$$

Здесь *X*- выпуклое, ограниченное и замкнутое множество в пространстве E^n, $f(x,\omega)$-измеримая при каждом ω функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица (т.е. существует такое $L(\omega) < \infty$ п.н., что для любого ограниченного множества X и любых $x, y \in X$, $\|f(x,\omega) - f(y,\omega)\| \le L(\omega)\|x - y\|$,

почти для любого ω, постоянная Липшица $L(\omega)$ есть численная мера гладкости); $\omega -$элементарное событие вероятностного пространства $(\Omega, \Im, P)$, где $\Omega -$множество элементарных событий; $\Im$-есть $\sigma -$ алгебра измеримых множеств из Ω; $P -$определенная в Ω вероятностная мера, т.е. $P(\Omega) = 1$. В свою очередь, $\Im$ можно интерпретировать как перечень всех трех групп конкретных исходов, которым можно приписать для всех групп из $\Im$ (например, это может быть аналитическая функция и т.д.).

Рассмотрим итеративный метод решения задачи (1), (2) состоящий в построении последовательности $\{x^s\}_{s=0}^{\infty}$ по рекуррентному правилу:

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s\xi^s), \quad s = 0,1,... \tag{3}$$

Здесь $s -$номер итерации; $x^0 -$начальное приближение -произвольный покомпонентное ограниченный вектор; ρ_s-шаговый множитель; ξ^s-стохастический квазиградиент функции $F(x)$ в точке x^s, т.е. $M(\xi^s / \Re_s) = \hat{F},(x^s)$, $\pi_x(y^s)$-оператор проектирования точки $y^s = x^s - \rho_s\xi^s$ на X, или отыскания такой точки $z = \pi_x(y^s)$, $z \in X$, что

$$\left\|z - y^s\right\|^2 \le \left\|x - y\right\|^2, \quad x \in X.$$

иными словами

$$\pi_X(y^s) = \arg\min\left\{\left\|x - y^s\right\|^2 / x \in X\right\}. \tag{4}$$

В том случае, когда $X -$многогранное множество, операция проектирования равносильна решению задач квадратичного программирования (4), один из методов решения которых рассмотрен в $[2]$.

Заметим также, что при росте n- размерности решаемой задачи возрастает трудоемкость написания программы, реализующей процедуру «прямого» вычисления стохастического квазиградиента. В общем случае эта программа должна состоять из n отдельных подпрограмм, каждая из которых вычисляет одну компоненту стохастического квазиградиента. В связи с этим возникает задача построения приближенных методов вычисления стохастического квазиградиента функции риска вида $M\ f(x,\ \omega)$, которые требовали бы только информацию о значениях функции $f(x,\omega)$ при фиксированных x и ω позволяли бы определить все компоненты стохастического квазиградиента на основе некоторой унифицированной процедуры. Такие методы разработаны на основы использования конечноразностных и случайнопоисковых аналогов градиента.

В работе предлагается конечноразностный аналог стохастического квазиградиента вида:

$$\xi_i^s = \left(f\left(\widetilde{x}^s + \Delta_s L^i, \omega^s \right) - f\left(\widetilde{x}^s, \omega^s \right) \right) / \Delta_s, \ i = 1, \ldots\ldots\ldots, n. \quad (5)$$

Здесь $\widetilde{x}^s = x^s + \widetilde{\theta}^s$, где $\widetilde{\theta}^s$ - реализация n- мерной случайной величины θ^s с независимыми, равномерно распределенными на $\left[-\alpha_s, \ \alpha_s\right]$, ℓ^i -орт i-ой оси; $\Delta_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$ компонентами.

Формулу (5) для определения стохастического квазиградиента сглаженной (дифференцируемой) функции риска $F^s(x) = Mf\left(x + \theta^s, \omega\right)$, причем последовательность функций $\left\{F^s(x)\right\}$

будет равномерно сходиться к функции $F(x) = Mf(x, \omega)$ при $\alpha_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$.

Теорема. Если стохастический квазиградиент ξ^s в методе (3),(4) определен согласно (5), то при выполнении условия

$$\rho_s > 0, \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty, \quad s = 0,1,\ldots, \ a_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0, \ ML^2(\omega) \le const < \infty$$

с вероятностью 1 предельные точки $\left\{x^s\right\}_{s=0}^{\infty}$, определенные согласно (3), принадлежат множеству X^* решений задачи (1), (2).

Доказательство теоремы основано на методике доказательства сходимости стохастических алгоритмов, рассмотренной в [2].

Список литературы

[1] Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука,1976.

[2] Мирзоахмедов Ф. Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов.-Киев:Наукова думка,1991.