А.М. Міненкова (Інститут прикладної математики та механіки, Донецьк, Україна)

Періодичне в середньому продовження розв'язків рівняння згортки

У цій роботі отримана нижня оцінка для интегралу від функції з класу Жеврея, що є розв'язком рівняння згортки. Також знайдена інтегральна оцінка для гладкої на півпрямій функції.

Нехай $T \in \mathcal{E}'(\mathrm{R}^1)$, $T \neq 0$, де $\mathcal{E}'(\mathrm{R}^1)$ – простір розподілів з компактними носіями і нехай $r(T)$ – довжина найменшого відрізку, що містить носій T.Припустимо, що

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty, b - a > 2r(T).$$

Введемо наступне позначення

$$(a, b)_T = \{t \in \mathrm{R}^1 : t - \mathrm{supp}T \subset (a, b)\}.$$

Позначимо $C_T^\infty(a, b)$ — клас нескінченно диференційовних функцій f,які є розв'язком рівняння згортки

$$(f * T)(t) = 0, \quad t \in (a, b)_T. \tag{1}$$

Нехай $\widehat{T} = \langle T, e^{-izt} \rangle$ – перетворення Фур'є T, $\mathcal{Z}(\widehat{T})$ – множина усіх нулів $\widehat{T}$.

Тепер опишемо клас функцій Жеврея. Для $\alpha \geq 1$ позначимо через $G^\alpha[a, b]$ множину всіх функцій $f \in C^\infty[a, b]$ таких, що

$$\int_a^b |f(t)|dt \leq \gamma^q q^{\alpha q},\ q = 1, 2, ...,$$

де $\gamma > 0$ залежить тільки від f, a, b. Також

$$G^\alpha(a, b) = \{f \in C^\infty(a, b) : f \in G^\alpha[c, d]\ \ \forall\, [c, d] \subset [a, b]\}.$$

Якщо функція $f \in G^\alpha(a, b)$ є розв'язком рівняння (1), то будемо казати, що $f \in G_T^\alpha(a, b)$.

Появі цієї роботи передувало вивчення властивостей поліномів з експонент (див. [1]) та питання про поведінку продовження розв'язків рівняння згортки (див. [2]).

Теорема 1.Нехай $T \in \mathcal{E}'(R^1)$, $T \neq 0$, $a \in \mathrm{R}$ і T задовільняє

$$\sup \frac{\mathrm{Im}\lambda}{\ln(2 + |\lambda|)} = +\infty,\ \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}) \tag{2}$$

Тоді існує $f \in C_T^\infty(a, +\infty)$ така, що для деякої додатньої послідовності $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$: $\varepsilon_n \to 0$ при достатньо великих n

$$\int_{a+\varepsilon_n/2}^{a+\varepsilon_n} |f(t)|dt \geq c\varepsilon_n^{1-n}, \tag{3}$$

де $c > 0$ - деяка константа, що не залежить від n.

Теорема 2. Нехай $T \in \mathcal{E}'(\mathrm{R}^1)$, $T \neq 0$, $a \in \mathrm{R}$ і T задовільняє

$$\sup \frac{\mathrm{Im}\lambda}{(1+|\lambda|)^{1/\alpha}} = +\infty, \; \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}). \tag{4}$$

Тоді існує $f \in G_T^{\alpha}(a, +\infty)$ така, що для певної додатньої послідовності $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$: $\varepsilon_n \to 0$ при достатньо великих n справджується нерівність (3).

Теорема 3. Нехай $T \in \mathcal{E}'(\mathrm{R}^1)$, $T \neq 0$, і припустимо, що T задовільняє

$$\sup \frac{m(\lambda, T)}{\mathrm{Im}\lambda + 1} = +\infty, \; \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}). \tag{5}$$

Тоді для кожного $R > r(T)$ існує $f \in C_T(-R, R)$ така, що для деякої додатньої послідовності $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{+\infty}$: $\varepsilon_m \to 0$ при достатньо великих m

$$\int_{-R+\varepsilon_m}^{R-\varepsilon_m} |f(t)|e^{1/(|t|-R)}dt \geq e^{1/2\varepsilon_m^{-4/3}}. \tag{6}$$

Теорема 4. Нехай $T \in \mathcal{E}'(\mathrm{R}^1)$, $T \neq 0$, і припустимо, що T задовільняє

$$\sup \frac{m(\lambda, T)}{\max\{\mathrm{Im}\lambda, \ln(2+|\lambda|)\}} = +\infty, \; \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}). \tag{7}$$

Тоді для кожного $R > r(T)$ існує $f \in C_T^{\infty}(-R, R)$ така, що для деякої додатньої послідовності $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$: $\varepsilon_n \to 0$ при достатньо великих n

$$\int_{R-2\varepsilon_n}^{R-\varepsilon_n} |f(t)|dt \geq e^{\varepsilon_n^{-4/3}}. \tag{8}$$

[1] *Леонтьев А.Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

[2] *Volchkov V.V. , Volchkov Vit.V.* Mean periodic functions. – Donetsk: Donetsk National University Press., 2008. – 194 с.