

А.С. Миненко (Державний університет інформатики і штучного інтелекту МОН України)

Наближений аналіз конвективної просторової задачі Стефана

Нехай Ω -задана область в R^3 , межа якої складається з двох замкнених, зв'язних гладких поверхней Γ^+ та Γ^- , які не мають самоперетинів. Поверхні $\Gamma^\pm$ припускаються такими, що належать до класу $H^{4+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Нехай далі Γ_t ($t \in [0, T]$) - гладкі замкнені поверхні, що лежать всередині Ω , такі, що Γ^+ лежить всередині обмеженої області, межею якої є Γ_t . Поверхня Γ_t -межа поділу фаз в момент часу t -розбиває область Ω на дві зв'язні підобласті Ω_t^+ та Ω_t^- . Розглядається двофазна задача Стефана при наявності конвективних рухів в рідинній фазі. Потрібно визначити швидкість рідини $\vec{V}(x, t) = (V_1(x, t), V_2(x, t), V_3(x, t))$, тиск $p(x, t)$, розподіл температур $u^+(x, t)$ та $u^-(x, t)$ відповідно в рідинній та твердій фазах та вільну поверхню Γ_t за наступними умовами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+(x, t)}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) u^+(x, t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in D_T^+, \\ \frac{\partial u^-(x, t)}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u^-(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in D_T^-, \\ \frac{\partial \vec{V}(x, t)}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V}(x, t) + \nabla p(x, t) &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}(x, t) + \vec{f}(u^+), \\ \nabla \vec{V}(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in D_T^+, \\ u^\pm(x, t)|_{t=0} &= A^\pm(x), \quad u^\pm(x, t)|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-} = B^\pm(x, t), \\ \vec{V}(x, t)|_{t=0} &= \vec{C}(x), \quad \vec{V}(x, t)|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma_t} = 0, \\ u^\pm(x, t)|_{x \in \Gamma_t} &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 \left[k_- \frac{\partial u^-}{\partial x_i} - k_+ \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \right] \cos(n, x_i) + \kappa \cos(n, t) = 0, \quad x \in \Gamma_t, \end{aligned} \quad (1)$$

де $D_T^\pm = \{(x, t) : x \in \Omega_t^\pm, t \in (0, T)\}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\Omega_t^\pm$ -області рідинної та твердої фази, на які розбиває область Ω вільна межа поділу фаз Γ_t , при чому $\vec{n} = \vec{n}^+ \cup \vec{n}^-$, $\vec{n}$ - нормаль до Γ_t , спрямована в бік Ω_t^+ , $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$.

Припускається, що $B^\pm(x, t) \in H^{3+\beta, \frac{3+\beta}{2}}(\Gamma^\pm \times [0, T])$, $0 < \beta < \alpha$, $\vec{C}(x) \in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_0^+)$, $A^\pm(x) \in H^{5+\alpha}(\bar{\Omega}_0^\pm)$, де $\Omega_0^\pm$ - області, на які розбиває Ω межа поділу фаз Γ_0 , та $\pm B^\pm(x, t) \geq \varepsilon_0 > 0$ при $(x, t) \in \Gamma^\pm \times [0, T]$, крім того, параметри $a_\pm, k_\pm, \kappa, \text{Re}, \varepsilon_0$ -вважаються додатними сталими, а $\vec{f}(u^+)$ -належність до класу $C^2(R^1)$, $\vec{f}'(u^+)$ обмежена в R^1 . Відзначимо, що при малих значеннях t задача (1) вирішувана в класі гладких функцій, при цьому $u^\pm \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{D}_T^\pm)$, $\vec{V} \in H^{2+\beta, \frac{2+\beta}{2}}(\bar{D}_T^+)$, а межа поділу фаз належить до класу $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$.

Нехай $\Omega_0^\pm$ - області, на які розбиває Ω межа поділу фаз Γ_0 . Для точок поверхні Γ_0 введемо координати $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, через $x(\omega) \in \Gamma_0$ або через ω будемо позначати також відповідні точки

в R^3 , $\vec{n}(\omega)$ -нормаль до Γ_0 , спрямована всередину $\Omega_0^\pm$. Відомо, що вільну межу Γ_t можна зобразити у вигляді $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega) \cdot \rho(\omega, t)\}$ з деякою функцією $\rho(\omega, t)$ класу $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0 \times [0, T])$, так що $\rho(\omega, 0) = 0$.

Припустимо, що невідомі нашої задачі можна зобразити у вигляді степеневого ряду:

$$u^\pm(x, t; \text{Re}) = u_0^\pm(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k u_k^\pm(x, t),$$

$$V_i(x, t; \text{Re}) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k V_{ik}(x, t), \quad i = 1, 2, 3; \quad \rho(\omega, t; \text{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k \rho_k(\omega, t)$$

і також виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A^\pm(x) &= 0, \quad x \in \Omega_0^\pm; \quad A^\pm(x) \Big|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x, 0), \quad A^\pm(x) \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \vec{C}(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_0^+, \\ k_- \left| \nabla A^-(x) \right|_{\Gamma_0} &= k_+ \left| \nabla A^+(x) \right|_{\Gamma_0}, \quad \left| \nabla A^\pm(x) \right|_{\Gamma_0} \geq \tilde{\varepsilon} > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема. Нехай виконані умови (2). Тоді при малих числах Рейнольдса Re й достатньо малих значеннях t є справедливою формула:

$$\begin{aligned} \Gamma_t : x &= x(\omega) - \text{Re} \vec{n} \frac{u_1^\pm(x(\omega), t)}{\left| \nabla u_0^\pm(x(\omega)) \right|} - (\text{Re})^2 \vec{n} \frac{u_2^\pm(x(\omega), t) - f_1^\pm(x(\omega), t)}{\left| \nabla u_0^\pm(x(\omega)) \right|} + o((\text{Re})^2), \\ x(\omega) &\in \Gamma_0, \end{aligned}$$

$$\text{де } f_1^\pm(x, t) = -\frac{\partial u_1^\pm}{\partial n}(x(\omega), t) \rho_1(\omega, t) - \frac{1}{2} \frac{d^2 u_0^\pm(x(\omega) + \tau n(\omega) \rho_1(\omega, t))}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} \quad \text{при } x \in \Gamma_0.$$

Остання формула дозволяє досліджувати вільну поверхню Γ_t задачі (1) в залежності від чисел Re .
