В. А. Михайлець, Н. В. Рева (Інститут математики НАН України, Київ)

Лінійні крайові задачі з параметром для систем звичайних диференціальних рівнянь

Розглянуто параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю лінійних крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$\alpha_\varepsilon y(a;\varepsilon) + \int\limits_a^b \Phi(t;\varepsilon)y'(t;\varepsilon)dt = c_\varepsilon, \tag{2}$$

де комплексні матриці-функції $A(\cdot,\varepsilon) \in L_1^{m\times m}$, $\Phi(\cdot,\varepsilon) \in L_\infty^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot,\varepsilon) \in L_1^m$, матриці $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектори $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$.

Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot;\varepsilon) \in W_{1,1}^m$, яка задовольняє диференціальне рівняння (1) майже скрізь на відрізку $[a,b]$ та крайову умову (2).

Припущення $\mathcal{E}$. *Однорідна гранична крайова задача з $\varepsilon = 0$ має лише тривіальний розв'язок.*

Означення 1. *Матрицею Гріна задачі (1), (2), що задовольняє умову $\mathcal{E}$, будемо називати матричну функцію $G(\cdot,\cdot;\varepsilon) \in L_\infty([a,b]\times[a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, за допомогою якої розв'язок напіводнорідної крайової задачі ($c_\varepsilon = 0$) можна представити у вигляді*

$$y(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b G(t,s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds, \qquad \forall f(\cdot;\varepsilon) \in L_1^m.$$

Якщо така матриця Гріна існує, то вона визначається однозначно з точністю до своїх значень на підмножині міри нуль.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення $\mathcal{E}$ і при $\varepsilon \to +0$ — такі умови:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_1 \to 0$;
2) $\alpha_\varepsilon \to \alpha_0$;
3) $\|\Phi(\cdot;\varepsilon) - \Phi(\cdot;0)\|_\infty \to 0$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ існують матриці Гріна $G(t,s;\varepsilon)$ розглянутих задач і на квадраті $[a,b]\times[a,b]$

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$