Ю.Л. Меньшиков (Днепропетровский унив., Днепропетровск, Украина)

Метод повышения точности приближенного решения обратной задачи для уравнения эллиптического типа

Рассматривается обратная задача восстановления граничного условия для дифференциального уравнения эллиптического типа. Указанная задача соответствует физической задаче восстановления формы $z(x)$ дна канала, вдоль которой движется жидкость, по измерениям формы свободной поверхности жидкости $\eta(x)$. Относительно искомой функции $z(x)$ получено уравнение первого рода [1,2]:

$$\eta(x) = \int_0^\infty z(\xi)\, K(x-\xi)\, d\xi = A_p z\,, \tag{1}$$

где $K(x-\xi)$ – функция, определяемая через несобственный интеграл и параметры h, g, c, A_p – интегральный оператор, который непрерывно зависит от вектора параметров $p = (h, g, c)^T$ математической модели ($(.)^T$–знак транспонирования).

Показано, что оператор A_p является вполне непрерывным для случая, когда $\eta(x) \in U = C[a,b]$, $z(x) \in Z = C[a,b]$ [2,3]. Таким образом, решение уравнения (1) является неустойчивым к малым изменениям исходных данных [2,3].

Предполагается, что точное решение z_T уравнения (1) принадлежит функциональному пространству $W_2^1[a,b]$ и что правая часть уравнения (1) и оператор A_p заданы с погрешностью

$$\|\eta - \eta_T\|_U \le \delta, \quad \|A_T - A_p\|_{Z \to U} \le h,$$

где η_T – точная правая часть уравнения (1); A_T – точный оператор в (1). Погрешность оператора A_p определяется погрешностью вектора параметров p математической модели $p = (h, g, c)^T$ [2].

Для получения устойчивого решения уравнения (1) используется метод регуляризации А.Н.Тихонова [3] со стабилизирующим функционалом вида

$$\Omega[z] = \int_a^b \left[z^2(s) + \dot{z}^2(s)\right] ds\,. \tag{2}$$

Для повышения точности приближенного решения уравнения (1) предлагается использовать метод выбора специальной математической модели процесса [3,4], основой которого является замена множества возможных решений уравнения (1), определяемого неравенствами (2), на более узкое множество. Даны математические обоснования такого подхода. На тестовых примерах показано, что указанный метод позволяет значительно повысить точность регуляризованного решения.

[1] Lonyangapuo, J.K. & others.// Computational Mechanics Publications. –1998.
[2] Menshikov, Y.// Proc. of GAMM. – Zurich: Switzerland.– 2001.
[3] Тихонов А., Арсенин В. Методы решения некорректных задач. ─ М.Наука. –1979.
[4] Menshikov, Y.// Proc. of 15th IMACS. – v.VI. – Berlin. –1997.