А.Г. Мазко (Институт математики НАН Украины, Киев, Украина)

Анализ устойчивости динамических систем на основе конусных неравенств

В прикладных исследованиях возникают нелинейные системы (дифференциальные, разностные, гибридные и др.), моделирующие позитивную или монотонную динамику реальных объектов. Классы позитивных и монотонных систем используются в теории устойчивости движения в качестве систем сравнения. В данной работе определяются свойства нелинейных дифференциальных и разностных систем

$$\dot{X} + F(X,t) = 0, \quad F(\Theta,t) \equiv 0, \quad X \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$X_{t+1} = F(X_t,t), \quad F(\Theta,t) \equiv \Theta, \quad X \in \mathcal{E}, \quad t = 0,1,\dots, \tag{2}$$

относительно множеств $\mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta) = \Theta \pm \mathcal{K}_t$, где $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{E}$ — некоторый конус. Эти свойства обобщают понятия позитивности и монотонности относительно конуса в полуупорядоченном пространстве. Предлагается классификация и описание таких систем уравнений в терминах их определяющих операторов F и элементов сопряженного конуса. Формулируется методика анализа устойчивости по Ляпунову состояний равновесия $X \equiv \Theta$ нелинейных систем (1) и (2) по их первому приближению с использованием понятия производных Гато и Фреше по конусу от нелинейного оператора. В частности, для для автономных систем (1) и (2) некоторых классов $\mathcal{M}_1(\Theta)$ при условиях существования производных Фреше $A_\pm = F'_\pm(\Theta)$ по $\pm\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — нормальный воспроизводящий конус, выполняются следующие утверждения.

Теорема 1. *Состояние $X \equiv \Theta$ системы (1) класса $\mathcal{M}_1(\Theta)$ асимптотически устойчиво, если операторы $A_\pm$ положительно обратимы: $\mathcal{K} \subseteq A_\pm\mathcal{K}$. Если конус $\mathcal{K}$ телесный, то данные условия эквивалентны разрешимости относительно $H_\pm$ системы конусных неравенств $H_- \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} H_+$, $A_-H_- \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} A_+H_+$.*

Теорема 2. *Состояние $X \equiv \Theta$ системы (2) класса $\mathcal{M}_1(\Theta)$ асимптотически устойчиво, если операторы $E - A_\pm$ положительно обратимы: $\mathcal{K} \subseteq (E - A_\pm)\mathcal{K}$. Если конус $\mathcal{K}$ телесный, то данные условия эквивалентны разрешимости относительно $H_\pm$ системы конусных неравенств $H_- \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} H_+$, $H_- - A_-H_- \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} H_+ - A_+H_+$.*

Предлагаются также методы исследования инвариантных множеств дифференциальных систем, обобщенный принцип сравнения семейства систем и новые подходы к решению задач о робастной устойчивости для систем с неопределенностью.

[1] Mazko A.G. Matrix Equations, Spectral Problems and Stability of Dynamic Systems // An international book series "Stability, Oscillations and Optimization of Systems"(Eds. A.A. Martynyuk, P. Borne and C. Cruz-Hernandez). Vol. 2. — Cambridge: Cambridge Scientific Publishers Ltd, 2008. — xx + 270 p.

[2] Мазко А.Г. Конусные неравенства и устойчивость дифференциальных систем // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 8. — С. 1058–1074.