П.П. Маслянко, А.В. Рябушенко (Кафедра прикладної математики факультету прикладної математики Національного технічного університету України «КПІ»)

Непараметричне Монте Карло: вдосконалений метод моделювання ризиків на фінансовому ринку

На практиці найбільш поширеними серед фінансових компаній методами моделювання ризиків є наступні [1]:

- Історична симуляція;
- Метод дисперсій та коваріацій;
- Монте Карло.

Метод історичної симуляції полягає в тому, що випадково вибираються проміжки історії дохідності фінансових інструментів з який складається інвестиційний портфель компанії. На кожному із історичних проміжків розглядається дохідність всього портфеля, що в результаті дає розподіл його дохідності в майбутньому, спираючись на припущення, що в майбутньому події будуть розгортатись так само, як і в історичних проміжках минулого. **До переваг методу історичної симуляції** відносять простоту її реалізації на практиці та збереження незмінним статистичного розподілу дохідностей фінансових інструментів, також метод не потребує оцінки статистичного розподілу для проведення симуляцій. **До недоліків** відносяться неможливість генерувати сценарії розвитку подій, які не траплялися раніше, цей недолік є дуже суттєвим, якщо в інвестиційному портфелі знаходяться фінансові інструменти, які не мають довгої історії котирування на ринку або взагалі не котируються.

Метод дисперій та коваріацій повністю спирається на припущення, про те що розподіл дохідностей підкоряється багатовимірному нормальному закону з фіксованими $\vec{\mu}$ - вектор математичний сподівань, $\vec{\sigma}$ - вектор стандартних відхилень та $\boldsymbol{V}$ – матриця коваріацій. Тоді для будь-якого ризику можна вивести аналітичний вираз для розрахунку значень ризику, що буде залежати лише від $\vec{\mu}$, $\vec{\sigma}$ та $\boldsymbol{V}$. **Основної перевагою** цього методу є швидкість проведення розрахунків за аналітичним виразом. **До недоліків** відносять припущення, що статистичний розподіл дохідностей фінансових інструментів має нормальний статистичний розподіл та необхідність проведення великої кількості попередньої аналітичної роботи.

Найбільш загальновживаним на практиці є метод Монте Карло [2]. Цей метод дозволяє не проводити вичерпний перебір всіх можливих варіантів розвитку подій у майбутньому, а використати репрезентативну вибірку сценаріїв. **До переваг** Монте Карло слід віднести лінійну залежність кількості симуляцій від кількості фінансових інструментів на відміну від вичерпного пошуку, де залежність експоненційна. В контексті моделювання ризиків, **до недоліків** відносять необхідність генерації відпадкових або псевдовипадкових значень, що потребує припущення щодо виду статистичного розподілу. Дослідники найчастіше припускають нормальний розподіл, тоді залишається знайти лише математичне сподівання дохідностей, її дисперсію та матрицю коваріацій для проведення симуляцій Монте Карло. Кількість симуляцій Монте Карло можна зменшити, використовуючи методи зниження дисперсії Монте Карло. А саме: керовані випадкові величини, протилежні змінні, районні вибірки, вибірки за значущістю [3]. Використання таких алгоритмів дозволяє суттєво знизити кількість симуляцій, які необхідно провести для оцінки ризиків методом Монте Карло.

Однак практика показує, що значення дохідність фінансових інструментів розподілена не за нормальним законом [4]. Який розподіл, насправді, має дохідність на фінансовому ринку, достовірно невідомо. Існує три основні версії: перша, що це Гамма розподіл, друга – Леві розподіл, третя – це все таки нормальний розподіл, але розриви торгів на ринку призводить до його спотворення. Достовірно відомо також, що використання нормального розподілу замість справжнього розподілу в методі дисперсій та коваріацій, а також Монте Карло призводить до недооцінки величини ризику. Це пояснюється, тим що реальна щільність ймовірності значно більша на кінцях розподілу у порівнянні з класичним нормальним розділом.

В цій роботі пропонується вдосконалений метод оцінки ризиків, який має переваги історичної симуляції та Монте Карло, тобто не потребує припущень щодо розподілу дохідності фінансових інструментів, і при цьому може генерувати нові сценарії розвитку подій, які ще не траплялись. Такий підхід є особливо актуальним в умовах коли статистичний розподіл дохідностей не є достовірно відомим.

Автори пропонують використати ядерний оцінювач щільності ймовірності (Kernel density estimator) [5]. Ядерний оцінювач щільності ймовірності здатен оцінити статистичний розподіл без жодних припущень щодо його закону. У випадку однієї випадкової величини ядерний оцінювач щільності ймовірності визначається як:

$$f(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{x - x_i}{h}),$$

де: x – випадкова величина, x_i – вибірка незалежно вибраних значень випадкової величини x, $f(x)$ - оцінена функція щільності ймовірності, $K(z)$ - функція, що зветься ядром (kernel), h – параметр згладжування функції, що зветься полосою пропускання, (bandwidth).

Ядерний оцінювач щільності ймовірності можна легко узагальнити для багатовимірного випадку. Батаговимірний ядерний оцінювач щільності ймовірності визначається як:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{nh_1 ... h_d}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{d} K(\frac{x_i - x_{ij}}{h_j})\right),$$

де: d – кількість випадкових величин, $\vec{x}$ – вектор випадкових величин, x_i – випадкова величина, x_{ij} – вибірка незалежно вибраних значень випадкової величини x_i, $f(\vec{x})$ - оцінена функція щільності ймовірності, $K(z)$ - ядро (kernel), h_j – полоса пропускання (bandwidth), для кожної випадкової величини окремий параметр.

В якості ядра можна вибрати будь-яку функцію, що відповідає вимогам: $0 \le K(z) \le 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} K(z)dz = 1$. Але дослідження доводять, що у випадку не нормально розподілених випадкових величин найкраще зарекомендувало себе ядро Епанєчнікова [6]:

$$K(z) = \frac{3}{4}(1 - z^2).$$

Одновимірний ядерний оцінювач густини ймовірності є дуже популярним методом дослідження в сфері непараметричної статистики, але багатовимірний варіант використовується значно рідше, ніж його одновимірний аналог. Основними причинами цього є відсутність чітких критеріїв вибору оптимальної полоси пропускання в багатовимірному просторі та обчислювальна складність розрахунків. За останні 20 років було зроблено багато досліджень цій сфері.

В роботах [7-8] пропонується алгоритм прискореного обчислення багатовимірного ядерного оцінювача ймовірності з використанням методів чисельної геометрії, який значно розширює рамки використання методу з десятків одночасно використовуваних випадкових величин до сотень випадкових величин. Цей алгоритм є найшвидшим алгоритмом серед усіх відомих на сьогодні. В статті [9] коротко викладені критерії та алгоритми вибору полоси пропускання у випадку багатовимірного оцінювача щільності ймовірності. Ми використали алгоритм, що представлений в статті [10].

Для практичного застосування ядерний оцінювач представляє результати оцінки функції щільності ймовірності у вигляді непридатному для проведення симуляцій Монте Карло, тому що для цього потрібний багатовимірний генератор псевдовипадкових величин саме з отриманою ядерним оцінювачем функцією щільності ймовірності. Оцінена таким чином функція може бути будь-якої форми, і саме тому необхідний генератор, який міг би генерувати випадкові значення з будь-якою функцією щільності ймовірності.

Автори пропонують використати метод вибірки з пропусканням в якості генератора випадкових величин. Метод полягає в заміні статистичного розподілу $f(\vec{x})$ більш простим $g(\vec{x})$, що дозволяє генерувати *n*-вимірні псевдовипадкові величини за на наступним алгоритмом:

1. Згенерувати *n*-вимірний випадковий вектор $\vec{y}$ з статистичним розподілом $g(\vec{x})$.
2. Згенерувати випадкове число U у проміжку [0,1].
3. Обчислити $T = c\dfrac{g(\vec{y})}{f(\vec{y})}$.
4. Якщо $UT \le 1$ перейти до кроку №1.
5. $\vec{y}$ - найдений випадковий вектор.

Метод вибірки з пропусканням потребує попереднього знаходження константи *c,* такої що для будь-якого $\vec{x}$ виконується нерівність $f(\vec{x}) \le cg(\vec{x})$, при умові $c \ge 1$. В цій роботі в якості $g(\vec{x})$ використовується *n*-вимірний рівномірний розподіл. Константа *c* шукається за наступним законом:

$$c = \frac{\max f(\vec{x})}{\max\left(\dfrac{1}{x_{1,\max} - x_{1,\min}}, \dfrac{1}{x_{2,\max} - x_{2,\min}}, \ldots, \dfrac{1}{x_{n,\max} - x_{n,\min}}\right)}$$

Ефективність алгоритму вибірки з пропусканням повністю залежить від вибору $g(\vec{x})$ та *c*. Чим більше $g(\vec{x})$ схожий с початковим розподілом $f(\vec{x})$ та чим менше *c*, тим ефективніший алгоритм. В цій роботі вибір $g(\vec{x})$ та *c*, далекий від оптимального, тому що нічого невідомо про початковий розподіл $f(\vec{x})$. В подальших дослідженням необхідно знайти більш ефективний алгоритм генерації псевдо-випадкових величин.

На рисунку 1 представлена модель удосконаленого методу моделювання ризиків - непараметричне Монте Карло, що представляє собою відображення діяльності компонента оцінки ризиків. Реалізація цієї моделі забезпечує застосування удосконаленого методу в системі управління фінансової інвестиційної діяльності [11]. Оцінка ризиків без припущень дозволяє надійно оцінити ризики в умовах, що швидко змінюються, наприклад, бурхливий ріст або фінансова криза.

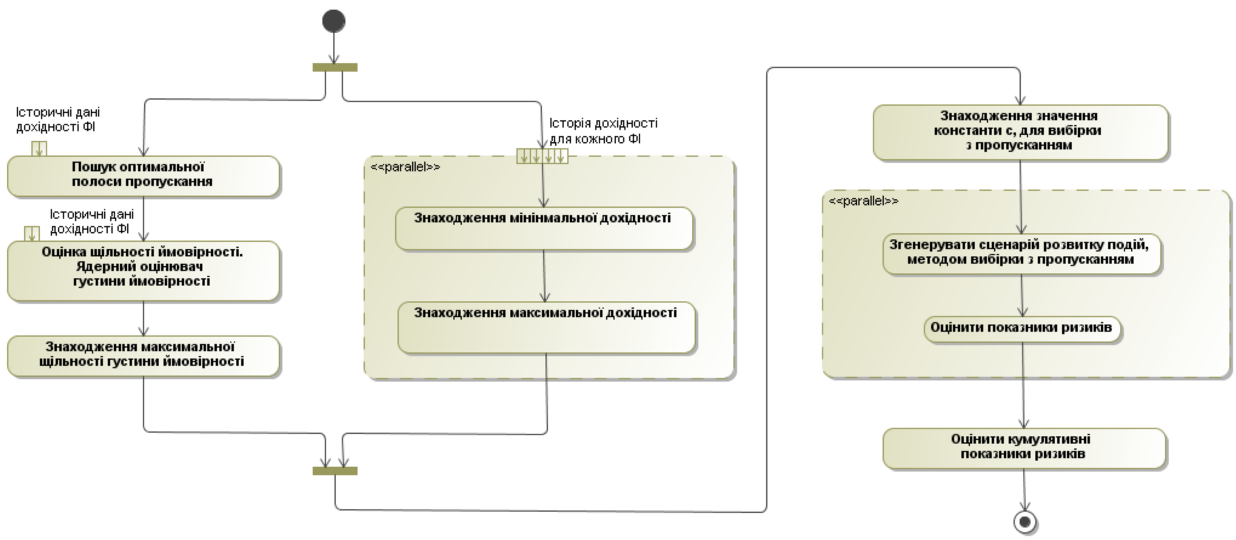

Рис. 1. Модель удосконаленого методу моделювання ризиків - непараметричне Монте Карло. Діаграма діяльності в нотації UML.

Висновки

Запропонований вдосконалений метод моделювання множини залежних випадкових величин будь-якої складності, який не вимагає жодних припущень щодо виду статистичного розподілу значень дохідностей. Ядерний оцінювач щільності ймовірності дозволяє уникнути недоліків пов'язаних з використання припущень щодо виду розподілу, які властиві методам Монте Карло, дисперсій та коваріацій. Тому, запропонований метод та алгоритм його реалізації може бути використаний в інших сферах діяльності, таких як страхування, споживче кредитування та інші.

Представлений метод відповідає світовим вимогам управління ризиками BASEL II [1]. Впровадження цього методу для оцінки ризиків в різних сферах фінансово-економічної діяльності дозволяє суб'єктам ринку точніше оцінити власний фінансовий стан та перспективи інвестування на ринку цінних паперів.

Література

1. Basel Committee on Banking Supervision. International Convergence of Capital Measurements and Capital Standards. 2005. Bank of international settlements - 284 c.
2. Jaeckel P. Monte Carlo Methods in Finance // Wiley. 2002. – c. 304
3. Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Stochastic Modelling and Applied Probability) // Springer. 2003. – c. 602
4. Officer R. R. The Distribution of Stock Returns // J. of the American Statistical Association. 1972. Vol. 67, No. 340, p. 807-812.
5. Rosenblatt. F. Remarks on some nonparametric estimates of a density function // Annals of Mathematical Statistics. 1956, №27 – c. 832–837.
6. Епанечников В. А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. №14, с. 153-158.
7. Gray A.G., Moore A.W. Very fast multivariate kernel density estimation via computational geometry // Joint Stat. Meeting, 2003.
8. Gray A.G., Moore A.W. Rapid evaluation of multiple density models // Journal Artificial Intelligence and Statistics, 2003.
9. Jones M.C., Marron J.S., Sheather S.J. A brief survey of bandwidth selection for density estimation // J. of the American Statistical Association. 1996. №91.
10. Duong T., Hazelton M.L. Cross-validation bandwidth matrices for multivariate kernel density estimation // Scandinavian Journal of Statistics. 2005. №32. c. 485-506.
11. Маслянко П.П., Рябушенко А.А. Компонентна модель інформаційно аналітичної системи та генетичний алгоритм формування оптимального портфеля акцій // Наукові вісті НТУУ «КПІ». 2009. № 1 - С.36-46.