В.А.Маркашева (Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина)

Локальные и глобальные оценки решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди-Грушина

В работе изучаются качественные свойства решений задачи Коши для вырождающихся параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди-Грушина. Получены точные локальные и глобальные по пространственным и временным переменным оценки решения. Установлено свойство финитности носителя решения.

Исследуется решение задачи Коши для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_{\lambda,\alpha}[u] = div_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u), (x,y,t) \in S_T = R^{N+M} \times (0,T), \qquad (1)$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), x \in R^N, y \in R^M, u_0(x,y) \geq 0 \;..\; x \in R^N, y \in R^M. \qquad (2)$$

Здесь $\lambda > 1$, а $x = (x_1, .., x_N), y = (y_1, .., y_M), N \geq 1, M \geq 1$- произвольные точки евклидовых пространств R^N и R^M соответственно. Символом $D_L u$ обозначим вектор

$$D_L u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, .., \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, .., |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M}).$$

Если $\alpha = 0$, то при условии $\lambda > 1$ ([1]) уравнение (1) описывает процесс с медленной диффузией. Операторы типа $L_{1,\alpha} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, где символ Δ означает оператор Лапласа, впервые исследовались в работах [2] и [3]. В работах [4] и [5] изучались качественные свойства решения уравнения $L_{\lambda,\alpha}[u] = f$, т.е. эллиптического аналога (1)(см. также [6] и имеющуюся там литературу).

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов работы введем необходимые понятия. Для любой локально суммируемой функции $f(z)$ обозначим

$$|||f|||_r = \sup_{\rho \geq r} \left(\rho^{-\frac{K}{\lambda-1}} \int\limits_{B_\rho} |f| dxdy \right).$$

Здесь и далее $K = Q(\lambda - 1) + \lambda + 1, Q = N + M(\alpha + 1)$,$B_\rho(0,0) = \{(x,y) \in R^{N+M} : d(x,y,0,0) \leq \rho\}$, где $d((x,y),(0,0)) = \left(|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2|y|^2\right)^{1/2(\alpha+1)}$. Параметр K можно сравнить с показателем Баренблатта и при $\alpha = 0$ он играет ключевую роль в описании качественных свойств решения вырождающихся уравнений (см. [1]). Q - однородная размерность в пространствах Карно-Каратеодори (см. [6]). Наконец, B_ρ является естественным расширением понятия открытого шара в пространствах Карно-Каратеодори.

Приступим к формулировке основных результатов работы.

Теорема 1 *Пусть* $u_0 \in L_{1,loc}(R^{N+M})$ *и для некоторого заданного* $r > 0$

$$|||u_0|||_r < \infty. \tag{3}$$

Тогда существуют положительные постоянные C_0, C_1, C_2*, зависящие лишь от параметров* λ, N, M, α*, что решение (обобщенное) задачи (1),(2) существует в* S_{T_r}*, где* $T_r = C_0|||u_0|||_r^{-\frac{1}{\lambda-1}}$*, и, кроме того, для всех* $0 < t < T_r$ *и* $R > r$ *справедливы оценки:*

$$|||u(\cdot,t)|||_r \leq C_1|||u_0|||_r, \tag{4}$$

$$||u(\cdot,t)||_{L_\infty(B_R)} \leq C_2 t^{-\frac{Q}{K}} R^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} |||u_0|||_r^{\frac{\lambda+1}{K}}. \tag{5}$$

Теорема 2 *Пусть* $u_0 \in L_1(R^{N+M})$ *и supp* $u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. *Тогда для всех* $t > 0$

$$Z(t) = \inf\{\rho : u(\cdot,t) = 0 \text{ для п.в. } x,y \in R^{N+M} \setminus B_\rho\} \leq 4R_0 + C_4 t^{\frac{1}{K}} ||u_0||_1^{\frac{\lambda-1}{K}} \tag{6}$$

Более того, при достаточно больших $t > 0$

$$Z(t) \geq C_5 t^{\frac{1}{K}} ||u_0||_1^{\frac{\lambda-1}{K}}, \tag{7}$$

$$||u(\cdot,t)||_{L_\infty(B_R)} \geq C_6 t^{-\frac{Q}{K}} ||u_0||_1^{\frac{\lambda+1}{K}}. \tag{8}$$

Содержание теоремы 1 является естественным обобщением результатов работы [7], где изучался случай $\alpha = 0$. Теорема 2 устанавливает свойство конечной скорости распространения возмущений и дает точные по порядку оценки размера носителя. Отметим, что при $\alpha = 0$ указанное свойство является естественным для уравнений с медленной диффузией (см. [1], [8], [9]). Доказательство Теоремы 1 приводится подходом работы [10], где существенно используются также идеи работы [7]. Доказательство финитности носителя проводится методом работы [10](см. также [11]). Результаты получены совместно с А.Ф.Тедеевым.

[1] A.S. Kalashnikov "Some properties of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations", *Russian Math. Surveys*, **42**(1987), 169-222

[2] V.V.Grushin "On a class of hypoelliptic operators", *Math USSR Sbrnik*, **12**:3(1970), 458-476

[3] M.S. Baouendi "Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés",*Bull.Soc.Math.France* , **95**(1967), 45-87

[4] B.Franchi, E. Lanconelli *Une metrique associee a une classe d'operateurs elliptiques degeneres*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec., Toronto, 1984

[5] B.Franchi, E. Lanconelli "Holder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* , **10** :4 (1983), 523-541

[6] N. Garofalo, D.-M.Nhieu "Isoperimetric and Sobolev Inequalities for Carnot-Caratheodory Spaces and the Existence of Minimal Surfaces", *Comm. Pure Appl. Math*, **49** (1996),1081-1144

[7] E. Di Benedetto, M.A. Herrero "On the Caushy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation", *Trans. AMS*, **314**:1(1989), 187-224.

[8] S.N. Antoncev "On the localization of solutions of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations", *Soviet Math. Dokl.*, **24**(1981), 420-424

[9] J.Diaz, L.Veron "Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolical quasilinear equations", *Trans. AMS.*, **290**:2(1985), 787-814

[10] D.Andreucci, A.F.Tedeev "Sharp estimates and finite speed of propagation for a Neumann problem in domains narrowing at infinity", *Advances in Differential Equations*, **5**(2000), 833-860

[11] D.Andreucci, A.F.Tedeev "Finite speed of propagation for thin film equations and other higher order parabolic equations with general nonlinearity", *Inferfaces and Free Boundaries*, **3**:3(2001), 233-264