

Билалов Б. Т., Мамедова З.В. (Институт математики и механики ., Баку, Азербайджан)

Об эквивалентных базисах

Пусть X банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Систему $\bar{x} \equiv \{x_n\}_{n \in N} \subset X$ назовем невырожденной если $x_n \neq 0, \forall n \in N$. Положим

$$K_{\bar{x}}^- \equiv \left\{ \{\alpha_n\}_{n \in N} : \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ сходится в } X \right\}$$

$K_{\bar{x}}^-$ назовем пространством коэффициентов системы $\bar{x}$.

Утверждение 1. Пусть $\bar{x}$ невырожденная система. Тогда $K_{\bar{x}}^-$ относительно обычных операций сложения, умножения на скаляр и нормы

$$\|\bar{\alpha}\|_{K_{\bar{x}}^-} = \sup_m \left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n x_n \right\|, \text{ где } \bar{\alpha} = \{\alpha_n\}_{n \in N}$$

является банаховым.

Оператор $T_K : K_{\bar{x}}^- \rightarrow X : T_K \bar{\alpha} = x$, где $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ назовем коэффициентным оператором.

Утверждение 2. Пусть $\bar{x} \subset X$ невырожденная система, $K_{\bar{x}}^-$ соответствующее пространство коэффициентов, $T_K : K_{\bar{x}}^- \rightarrow X$ коэффициентный оператор. $\bar{x}$ образует базис в X только тогда, когда T_K является изоморфизмом между $K_{\bar{x}}^-$ и X .

Пусть $\bar{x} \subset X$ базис с сопряженной системой $\bar{x}^* \equiv \{x_n^*\}_{n \in N} \subset X^*$.

Систему $\bar{y} \equiv \{y_n\}_{n \in N} \subset X$ назовем σ -близкой к $\bar{x}$, если выражение

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)(y_n - x_n),$$

порождает вполне непрерывный в X оператор.

Теорема 1. Пусть $\bar{x}$ базис в X и $\bar{y}$ σ -близка к нему. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\bar{y}$ полна;
 - 2) $\bar{y}$ минимальна;
 - 3) $\bar{y}$ ω -линейно независима;
 - 4) $\bar{y}$ образует изоморфный к $\bar{x}$ базис в X ;
 - 5) оператор $(I + T)$ обратим, где $I : X \rightarrow X$ тождественный оператор.
-