Я.Б. Маланюк (Міжнародний науково–навчальний центр інформаційних технологій і систем НАНУ, Київ, Україна)

Про некоректні задачі в математиці

Розглянемо рівняння першого роду $Ax = y$, де A відомий оператор в метричному просторі переводить невідомий елемент x в елемент y, який ми можем виміряти тільки з похибкою не меншою за шкалу вимірюваного приладу. Ми будемо розгядати випадок, коли простір гільбертів і A - додатній обмежений оператор, для якого існує необмежений обернений оператор. Задачі такого виду відносяться до так званих некоректно поставлених – у них немає неперервної залежності розв’язку від правої частини рівняння, тобто малі відхилення правої частини рівняння можуть викликати значні відхилення в розв’язку, або розв’язок при цих умовах взагалі може і не існувати. Тим паче нам хотілось щоб наближений розв’язок був близький до розв’язку даного рівняння.

При використанні компютерів помилки заокруглень неминучі і їх вплив на результати розрухунків в минулому столітті замітив Дж. Х. Уілкинсон і його дослідження в 1963 році дані в [1]. Він же також відчував важливу роль спектра оператора при розв’язуванні рівнянь і його дослідження в 1965 році представлені в [2].

А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьв, В.К Іванов [3] і одночасно Д.Л.Філіпс в 1962 році запропонували некоректну задачу замінити сукупністю коректних задач при цьому узгодити цю заміну з похибкою заокруглень. Приклади такої заміни є регуляризуючий функціонал Тихонова, мінімальне значення якого еквівалентне ров’язвязку рівняння $\alpha E + Ax_{\alpha} = y$, де E – одиничний оператор, а α - додатнє число, яке називають параметром регуляризації. Норма оберненого оператора обмежена і буде рівна $1/\alpha$ Як параметр регуляризації також беруть номер ітерації в ітераційному процесі. При такій заміні спектр оператора A зсуваємо на величину α і нижня грань спектру буде α, а не нуль і оператор буде додатньовизначений, а задача коректною. До такого типу задач зводяться інтегральні рівняння першого роду, в більшості випадків при числовому розв’язку їх заміняють системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

В 1970 році Голуб і Райніш [4] розробили і запрограмували на фортрані і алголі алгоритм, який дає можливість знаходити власні вектори і власні значення лінійної алггебраїчної системи. Я запрограмував цей алгоритм в середовищі Delphi 5 в операційній системі Windows XP. Дану інформацію я використав для розв’язування некоректних задач, розділивши власні значення близькі до нуля (некоректну), а останні (коректну) частину. Розв’язок одержуємо як ряд Фур’є по власних функціях, регуляризуємо тільки некоректну частину [5].В даний час проводяться дослідження даного алгоритму для рівняння Абеля, яке використовується в компютерній томографії.

1. Wilkinson J.H. Rounding Errors in Algebraic Processes Notes on Applied Science No. 32,Her Majesty’s Stationary Office, London, Prentice-Hall, New Jersey, 1963
2. Уикинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. 1986
4. Golub G.H., Reinsch C. Singular values decomposition and least squares solution. Numer. Math., 14, pp. 403-420, 1970

Маланюк Я.Б. О регуляризующем согласно А.Н.Тихонову алгоритме решения линейных некорректных уравнений первого рода // Международная конференция „Вопросы оптимизации вычислений” / Тезисы док. – К., 2005. – С. 138. (укр.)