А.В. Макаренко (ФГУП «НИИ Прецизионного приборостроения», Москва, Россия)

Рекурсивный тангенциально-угловой оператор и его применение для анализа структуры стационарных вещественных полей

В работах [1, 2] предложен оригинальный подход к анализу структуры динамических процессов во временной области, основанный на идее дифференциально-геометрических преобразований. В настоящей работе этот метод распространяется на стационарные вещественные поля $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ – вещественную векторную функцию векторного аргумента:

$$\mathbf{s} \in \mathrm{S} \subset \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{r} \in \mathrm{R} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathrm{M} \subset \mathbb{N}^1, \quad n \in \mathrm{N} \subset \mathbb{N}^1, \tag{1}$$

причём: $m = 1, \ldots, M$; $n = 1, \ldots, N$. Потребуем дифференцируемости функции $\mathbf{s}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) \in C^K(\mathrm{R}), \quad K \in \mathbb{N}^1, \quad K > 0. \tag{2}$$

Для сигнала $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ определим расширенное метрическое пространство состояний, и введём в нём евклидову метрику:

$$\Omega = \mathrm{S} \times \mathrm{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}, \quad \mathrm{d}l^2\,(\Omega) = \sum_{m=1}^{M} s_m^2 + \sum_{n=1}^{N} r_n^2. \tag{3}$$

Введём в рассмотрение зондирующий оператор $\mathrm{Z^C}_u$ [2]:

$$\mathrm{Z^C}_u = \frac{\mathbf{v^{cp}}_u}{|\mathbf{v^{cp}}_u|} \cdot (\mathbf{b_v} + \mathbf{C_v} \circ)\,. \tag{4}$$

Неотрицательная диагональная матрица $\mathbf{C_v}$ служит для независимого масштабирования, а вектор $\mathbf{b_v}$ – для независимого центрирования компонент поля $\mathbf{s}(\mathbf{r})$. Структура компонентного зондирующего вектора $\mathbf{v^{cp}}_u$ и зондирующего базиса $\mathrm{V^{cp}} \ni \mathbf{v^{cp}}_u$ – подробно описаны в работе [2]. Оператор $\mathrm{Z^C}_u$ действуя на поле $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ порождает u-ю аналитическую конфигурацию исследуемого поля, описываемую функцией $\mathrm{f}^{\mathrm{p}}_u(\mathbf{r})$:

$$\mathrm{f}^{\mathrm{p}}_u(\mathbf{r}) = \mathrm{Z^C}_u\,\mathbf{s}(\mathbf{r}). \tag{5}$$

Дополнительно к оператору $\mathrm{Z^C}_u$ определим рекурсивный тангенциально-угловой оператор $\mathrm{G^a}_{k,\,p}$ порядка k и конфигурации p (умножение производится слева):

$$\mathrm{G^a}_{k,\,p} = \prod_{i=1}^{k} \operatorname{arctg}\left[(c_s)_i\,\frac{\mathbf{v^{cd}}_p}{|\mathbf{v^{cd}}_p|} \cdot \nabla\right], \quad k \in 1, \ldots K, \tag{6}$$

где $c_s > 0$ – масштабный коэффициент. Аналог оператора (6) для динамических процессов $\mathbf{s}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^1$ описан в работе [1]. Отличие заключается во введении в конструкцию оператора (6) координатного зондирующего вектора $\mathbf{v^{cd}}_p$, который порождает p-ю аналитическую конфигурацию исследуемого поля.

Оператор $\mathrm{G^a}_{k,\,p}$ действуя на функцию (5) порождает систему угловых функций [1]:

$$\alpha_{p,\,u}(\mathbf{r}) = \mathrm{G^a}_{1,\,p}\,\mathrm{f}^{\mathrm{p}}_u(\mathbf{r}), \quad \varphi_{0,\,p,\,u}(\mathbf{r}) = \mathrm{G^a}_{2,\,p}\,\mathrm{f}^{\mathrm{p}}_u(\mathbf{r}), \quad \varphi_{i,\,p,\,u}(\mathbf{r}) = \mathrm{G^a}_{i+2,\,p}\,\mathrm{f}^{\mathrm{p}}_u(\mathbf{r}), \tag{7}$$

Величина $\alpha_{p,\,u}$ фактически описывает скоростные свойства (мгновенную крутизну), а $\varphi_{0,\,p,\,u}$ – нелинейные свойства (мгновенную кривизну) локального фронта (p, u)-й аналитической конфигурации исследуемого поля $\mathbf{s}$ в точке $\mathbf{r}$.

Для описания структуры поля $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ над системой функций (7) формируется минимальный базис [1]:

$$\mathrm{P}_0 = \mathrm{F^p} \times \mathrm{A} \times \Phi_0,\, \mathrm{P}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{F^p} \ni \mathrm{f}^{\mathrm{p}}_u,\, \mathrm{A} \ni \alpha_{p,\,u},\, \Phi_0 \ni \varphi_{0,\,p,\,u}. \tag{8}$$

Из (8) посредством проективных линейных ортогональных преобразований выделяются два подпространства имеющие самостоятельное информационное значение для исследования и описания характеристик поля [1].

Пространство *статической структуры поля*:

$$\mathrm{P_{st}} = \mathrm{F^p} \times \mathrm{A}, \quad \mathrm{P_{st}} \in \mathbb{R}^2, \tag{9}$$

фазовое множество в нём определяет структуру состояний поля.

Пространство *динамической структуры поля*:

$$\mathrm{P_{dn}} = \mathrm{A} \times \Phi_0, \quad \mathrm{P_{dn}} \in \mathbb{R}^2, \tag{10}$$

фазовое множество в нём определяет структуру переходов между состояниями поля.

Далее над (8) определяется ряд интегральных мер [1, 2] позволяющих количественно и качественно описать различные характеристики структуры поля $\mathbf{s}(\mathbf{r})$.

Необходимо отметить, что предложенный подход автоматически предполагает проведение самосогласованного анализа поля $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ – как объекта имеющего цельную динамику и структуру.

[1] Макаренко А.В. Выражение структуры динамического процесса во временной области в терминах дифференциальной геометрии. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. № 4.

[2] Макаренко А.В. Обобщение углового оператора на случай анализа векторных динамических процессов. // Международная научная конференция «Моделирование нелинейных процессов и систем». / Сборник докладов. – Москва, МГТУ «СТАНКИН», 2008.