О.М.Литвин, Л.С.Лобанова (Каф. прикладної математики Української інженерно-педагогічної академіі, Харків, Україна)

Метод розв’язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, точний на системах однорідних лінійних диференціальних рівнянь

Поведінку фізичних процесів і фізичних систем можна описати математичною моделлю у формі систем звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь у частинних похідних. Складену математичну модель досліджуваного об’єкта можна розв’язувати як аналітично, так і чисельно. Як відомо, аналітичні розв’язки можна знайти лише у найпростіших випадках і виникає потреба інтегрування систем диференціальних рівнянь чисельними методами. Методи теорії наближення функцій, точні на деяких классах функцій, займають особливе місце в теорії наближення. Серед них є оптимальні: квадратурна формула Гауса є точною на поліномах найвищого степеня $2n$; поліном Тейлора степеня n точно відновлює всі алгебраїчні поліноми степеня n; сума Фур’є порядку n точно відновлює всі тригонометричні поліноми степеня n. В роботі О.М.Литвина [1] досліджено метод скінченних елементів розв’язання крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь , точний на відповідних однорідних крайових задачах.

В практиці розв’язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР) відомі методи Рунге – Кутта (метод Ейлера – частинний випадок), неявний метод Ейлера [2]. Суттєві проблеми виникають при розв’язанні задачі Коші для СЗДР у випадку жорстких СЗДР [3,4], коли матриця A системи

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f \tag{1}$$

має великий розкид власних чисел $\det(A-\lambda_k E)=0, \quad k=\overline{1,n}$, тобто $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} >> 1$. Це приводить до того, що на деяких проміжках відрізку $[0,T]$ точний розв’язок може різко змінюватися (тобто його похідні будуть мати великі норми $\left\|\frac{d^p y}{dt^p}\right\|_{C[0,1]} >> 1, 1 \le p \le P$). Крім того, існує проблема вибору кроку, яка в різних методах з адаптивним вибором кроку розв’язується по різному [2].

Метою даної роботи є розробка і дослідження нового методу розв’язання задачі Коші для СЗДР (1), який є точним на однорідних системах $\frac{dy}{dt} = Ay$. Розв’язок задачі шукаємо у вигляді $y(t) = y_0(t) + y_ч(t)$, де $\frac{dy_0}{dt} = Ay_0$, $y_0(0) = y_0$, $y_ч(0) = 0$ і вектор-функцію $y_ч(t)$ знаходимо у вигляді сплайна степеня $r\,(r \ge 1)$. Метод полягає у мінімізації деякого функціонала, що дозволяє адаптивно вибирати кроки в залежності від A, f на різних підінтервалах інтервалу інтегрування $[0,T]$.

[1] О.М. Литвин. Оптимальні схеми методу скінченних елементів, точні на класі задач $(-1)^n y^{(2n)}(x) = f(x) (a < x < b), y^{(s)}(a) = y^{(s)}(b) = 0 (s = \overline{0, n-1})$ // Доп. АН України.-1992. -№6.-С.31-36.
[2] І.П.Гаврилюк, В.Л.Макаров. Методи обчислень: Підручник: У 2 ч.- К. : Вища шк.., 1995.- Ч. 2.-431 с.
[3] І.О.Хвищун. Програмування і математичне моделювання.- К: Видавничий дім “ Ін Юре”, 2007.-544с.
[4] Ю.В.Ракитский, С.М. Устинов, И.Г. Черноруцкий. Численные методы решения жестких систем.-М: Наука.-1979.-208с.