Н.В. Лукова (Киевский нац. университет имени Т.Шевченко, Киев, Украина)

Топологическая еквивалентность функций без критических точек на полном кренделе

Пусть M – полный крендель, $f{:}M \to \mathbf{R}$ гладкая функция на нём. Функция f называется p-функция, если она не имеет критических точек и ограничения её на границу имеет 4 критические точки, таких что в первых двух точках (точки нумеруются по возрастанию значений функции в них) вектор поля градиента направлен внутрь многоообразия, а в оставшихся двух - вне.

Рассмотрим, как изменяется поверхность уровня $p-$функции при увеличении значения функции.

При прохождении через точку минимума появляется двухмерный диск. Далее, при отсутствии критических точек топологический тип поверхности уровня не изменяется.

При прохождении второй точки к двухмерному диску приклеивается $2k-$угольник по k сторонами, которые размещены через одну (например нечетные, при последовательной нумерации сторон). Получим поверхность с краем и k разрезов (правильно вложенных кривых) на ней. Проведя аналогичные рассмотрения для функции $-f$ получим изотопную поверхность с системой разрезов на ней. Ориентации двухмерных дисков задают ориентации разрезов.

Тройку (F, u, v), состоящую из поверхности с краем и двух систем разрезов, будем называть p-диаграммой . P-диаграммы (F, u, v) и $(F\prime,\ u\prime,\ v\prime\ )$ называются гомеоморфными, если существует такой гомеоморфизм h: $F\ \to F\prime$, что $h(u){=}u\prime$, $h(v){=}v\prime$. При этом, если гомеоморфизм сохраняет (изменяет) ориентацию поверхности, то он и сохраняет (изменяет) ориентации разрезов. В случае неориентированой поверхности, гомеоморфизм сохраняет или одновременно изменяет ориентации всех u-разрезов и, аналогично, v-разрезов.

P-диаграммы (F, u, v) и $(F\prime,\ u\prime,\ v\prime\ )$ называются полуизотопными, если существуют такие изотопии φ_t, ψ_t: $F \to F$, что $\varphi_0 = \psi_0{=}\mathrm{id}$, $\varphi_1(u){=}u\prime$, $\psi_1(v){=}v\prime$. Исспользуя полуизотопию диаграммы можна уничтожить все криволинейные двухугольники, одна из сторон которых принадлежит системе u, а другая v. Точно также можна уничтожить все криволинейные трёхугольники, у которых одна сторона принадлежит системе u, другая v, а третья ∂F. Также с помощью полуизотопии кривые из системы u и v, которые изотопные, можна сделать такими, которые совпадают. Диаграмму, у которой нет криволинейных двухугольников и трёхугольников, а изотопные кривые с разных систем совпадают, будем называть нормализованой.

Теорема *P-функции* f: $M \to \mathbf{R}$, g: $N \to \mathbf{R}$ *топологично еквивалентны тогда и только тогда, когда построенные за ними нормализированные p-диаграмми гомеоморфны.*