Лінчук Н.Є., Лінчук С.С. (Чернівецький Національний університет ім. Ю. Федьковича)

Про операторні рівняння, що містять функції від оператора Помм'є

Нехай G - довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{H}'(G)$ – простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{H}(G)$. Символом $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2)\right)$ позначимо множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$. Якщо $0 \in G$, то через Δ позначимо оператор Помм'є, який лінійно та неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом: $(\Delta f)(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ при $z \neq 0$ і $(\Delta f)(0) = f'(0)$. Оператор Помм'є є модельним для просторів аналітичних функцій. Багаточисельні дослідження з теорії операторів присвячені вивченню різноманітних задач, пов'язаних з оператором Помм'є. В [1] доведено, що формулою

$$(Af)(z) = \underset{\zeta}{L}\left[\frac{zf(z)-\zeta f(\zeta)}{z-\zeta}\right], \tag{1}$$

де L є довільним функціоналом з $\mathcal{H}'(G)$, визначається загальний вигляд операторів $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G))$, які комутують з оператором Δ. Характеристична за Кете функція оператора (1) збігається з $\frac{\lambda l(\lambda)}{\lambda - \tilde{z}}$, де $l(\lambda) = \underset{z}{L}\left[\frac{1}{\lambda - z}\right]$ –характеристична функція функціонала $L \in \mathcal{H}'(G)$, яка є аналітичною на множині $\mathcal{C}G$. Оскільки характеристична функція оператора Помм'є дорівнює $\frac{1}{\lambda(\lambda-z)}$, то оператор (1) називатимемо функцією від оператора Помм'є.

В цьому повідомленні вивчаються загальні операторні рівняння виду

$$TA_1 = A_2T \tag{2}$$

які містять функціїї від оператора Помм'є $(A_i f)(z) = \underset{\zeta}{L_i}\left[\frac{zf(z)-\zeta f(\zeta)}{z-\zeta}\right], i = 1, 2.$

Теорема. Нехай G_i – довільна область в $\mathbb{C}$, що містить точку 0, $L_i \in \mathcal{H}'(G_i)$, причому характеристична функція функціонала L_i дорівнює $l_i(\lambda)$, $i = 1, 2$. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ був розв'язком рівняння (2) необхідно і достатньо, щоб функція $(\lambda l_1(\lambda) - z l_2(z))t(\lambda, z)$ аналітично продовжувалася на множину $\mathcal{C}G_1 \times \mathcal{C}G_2$, $(\lambda \in \mathcal{C}G_1, z \in \mathcal{C}G_2)$.

Це твердження застосовується для одержання необхідних та достатніх умов існування нетривіального розв'язку рівняння (2). При додаткових умовах на оператори $A_i, i = 1, 2$, одержано в явному вигляді зображення всіх розв'язків рівняння (2).

[1] Линчук Н.Е. Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения // Матем. заметки. — 1988. —**44**, N6. — С.794 —802.