Лінчук Ю.С. (Чернівецький Національний університет ім. Ю. Федьковича)

Про еквівалентність операторів композиції в просторі цілих функцій

Нехай $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ – простір цілих функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Кожна ціла функція $\varphi(z)$ породжує оператор композиції K_φ, який лінійно та неперевно діє в просторі $\mathcal{H}$ за правилом: $(K_\varphi f)(z) = f(\varphi(z))$, $z \in \mathbb{C}$. Різні властивості операторів композиції у просторах аналітичних в одиничному крузі $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцій з обмеженнями на ріст їхнього модуля (просторах Харді, Бергмана, Діріхле) досліджувалися в працях Е. Нордгріна, Д. Шапіро, Р. Сайнга, Д Менхеса, К. Коуена, Б. Макклуер, Б. Клода. Комутаційні властивості операторів композиції, що діють у просторі $\mathcal{H}(D)$ і породжені дробово-лінійними автоморфізмами одиничного круга D вивчені в працях [1], [2]. В цьому повідомленні досліджені задачі, аналогічні до розглянутих у [1], [2] для операторів композиції у просторі цілих функцій.

Добре відомо, що загальний вигляд конформних автоморфізмів комплексної площини на себе дається формулою: $\varphi(z) = az+b$, де $a, b \in \mathbb{C}$, причому $a \neq 0$. Кожне таке відображення породжує у просторі $\mathcal{H}$ оператор композиції $T_{a,b}$, що діє за правилом: $(T_{a,b}f)(z) = f(az + b)$.

Якщо $a = 1$, то відповідний оператор $T_{1,b} = E_b$, де E_b – оператор зсуву, що діє у просторі $\mathcal{H}$. Якщо $b = 0$, то відповідний оператор $T_{a,0} = L_a$, де L_a – оператор гомотетії, що діє в $\mathcal{H}$. Сформулюємо основний результат повідомлення.

Теорема. Нехай $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, причому $a_j \neq 0$, $j = 1, 2$. Для того, щоб оператори T_{a_1,b_1} та T_{a_2,b_2} були еквівалентними в просторі $\mathcal{H}$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна з умов:
1) $a_1 = a_2 = 1$ і $b_1 = b_2 = 0$;
2) $a_1 = a_2 = 1$ і $b_1 b_2 \neq 0$;
3) $a_1 = a_2 \neq 1$, $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$;
4) числа a_1 та a_2 були первісними коренями з одиниці одного і того ж степеня n, $n \geq 2$, $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$.

Кожен з операторів виду $T_{a,b}$ $(a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$ зводиться до оператора зсуву E_b у випадку $a = 1$ або є еквівалентним до оператора гомотетії L_a, якщо $a \neq 1$. Використовуючи описи комутантів операторів зсуву та гомотетії в просторі H, легко одержати опис комутанта довільного оператора композиції $T_{a,b}$ у просторі $\mathcal{H}$.

[1] Лінчук Ю.С. Комутант одного класу операторів композиції в просторах аналітичних функцій // Доповіді НАН України. – 2005, № 11. – С. 14 – 17.

[2] Linchuk Yu.S. Representation of commutants for composition operators induced by a hyperbolic linear fractional automorphisms of the unit disk // Methods of Funct. Anal. and Top.–2008.– 14, №4. – P.361-371.