Е.Ю. Леончик (Одесский национальный университет, Украина)

Об оценке перестановки функции из класса Макенхаупта A_1

Пусть положительная суммируемая функция двух переменных f отделена от нуля на квадрате Q_0, то есть $\operatorname{ess\,inf}_{x\in Q_0} f(x) > 0$. Говорят, что f удовлетворяет условию Макенхаупта A_1 при некотором $C > 1$ ($f \in A_1(C)$), если для всех подквадратов $Q \subset Q_0$ выполнено следующее неравенство [1]

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q} f(x).$$

Данное условие на вес, в частности, является необходимым и достаточным для принадлежности ряда операторов слабому весовому пространству L_1.

Невозрастающая перестановка f^* равноизмеримая с функцией f может быть определена следующим равенством

$$|\{x \in Q_0 \,:\, f(x) > \lambda\}| = |\{t \in [0;|Q_0|] \,:\, f^*(t) > \lambda\}|, \qquad \lambda > 0.$$

Для изучения свойств некоторых классов функций важную роль играют точные оценки перестановок функций из этих классов.

Известно, что для равноизмеримой перестановки функции $f \in A_1(C)$ также выполнено условие Макенхаупта, но с некоторой, вообще говоря, другой постоянной. В работе [2] в одномерном случае установлено, что условие $f \in A_1(C)$ влечет $f^* \in A_1(C)$.

С другой стороны в [2] построен пример, показывающий, что для любого $B < 2C$ найдется такая функция двух переменных $f_0 \in A_1(C)$, для которой $f_0^* \notin A_1(B)$. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема. *Если функция двух переменных $f \in A_1(C)$, то $f^* \in A_1(2C)$.*

Очевидно, что значение постоянной 2, вообще говоря, уменьшить нельзя.

[1] Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 165.

[2] Bojarski B., Sbordone C., Wik I. The Muckenhoupt class $A_1(\mathcal{R})$ // Studia Math. — 1992. — Vol. 101 (2).