*Ленюк М. П.* (Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

## Обчислення невласних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є – Бесселя – Ейлера на обмеженій справа декартові піввісі

Розглянемо гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)} = \theta(R_1 - r)\, d^2\!\big/_{dr^2} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)B_{\nu,\alpha_1} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)B^*_{\alpha_2}, (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (1)$$

Тут $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда, $B_{\nu,\alpha_1}$ -диференціальний оператор Бесселя, $B^*_{\alpha_2}$ - диференціальний оператор Ейлера:

$$B_{\nu,\alpha_1} = d^2\!\big/_{dr^2} + \frac{2\alpha_1 + 1}{r}\, d\!\big/_{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha_1^2}{r^2},\ B^*_{\alpha_2} = r^2\, d^2\!\big/_{dr^2} + (2\alpha_2 + 1) r\, d\!\big/_{dr} + \alpha_2^2, 2\alpha_j + 1 > 0, \nu \geq \alpha_1.$$

ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений і має на множині $I_2 = \{r : r \in (-\infty, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3);\ \ R_1 > 0, R_3 < \infty\}$ одну особливу точку $r = -\infty$, Тому його спектр дійсний й неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) = \theta(R_1 - r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta).$$

Функції $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ знаходимо як розв'язок відповідної задачі Штурма – Ліувілля ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$, наявність яких дає можливість запровадити інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2$ ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$.

Побудуємо обмежений на множині $I_2$ розв'язок крайової задачі

$$(M_{\nu,(\alpha)} - q^2)u(r) = -g(r), r \in I_2 \quad (2)$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}, j,k = 1,2, \quad (3)$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to-\infty} \frac{d^m u_1}{dr^m} = 0, m = 0,1; (\alpha_{22}^3\, d\!\big/_{dr} + \beta_{22}^3)u_3\Big|_{r=R_3} = g_R \quad (4)$$

Наявність фундаментальної системи розв'язків для модифікованих диференціальних рівнянь Фур'є, Бесселя та Ейлера дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (2)-(4) методом функцій Коші. При цьому головні розв'язки крайової задачі будуть виражатися через модифіковані функції Бесселя $I_{\nu,\alpha_1}(q_2 r)$ та $K_{\nu,\alpha_1}(q_2 r)$, функції $\exp[q_1(r - R_2)]$ та $\exp[-q_1(r - R_2)]$, функції $r^{-\alpha_2 + q_3}$ та $r^{-\alpha_2 - q_3}$.

З другого боку, будуємо розв'язок крайової задачі (2)-(4) методом запровадженого гібридного інтегрального перетворення . Головні розв'язки крайової задачі будуть зображатися у вигляді невласних інтегралів від параметру $\beta$ .

Порівнюючи одержані розв'язки в силу єдиності, маємо формули обчислення невласних інтегралів, відсутніх в довідковій математичній літературі.