М.Ш.Шабозов, М.Р.Лангаршоев (Институт математики АН Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан)

Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана

В данном сообщении изучаются вопросы наилучшего приближения аналитических в круге функций комплексными алгебраическими полиномами в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$ и вычислены значения различных $n-$поперечников класса функций задаваемая модулем непрерывности второго порядка. Известно [1], что функция $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$, если

$$\|f\|^q_{B_{q,\gamma}} = 1/(2\pi) \iint\limits_{|z|<1} \gamma(|z|)|f(z)|^q dxdy < \infty,$$

где $\gamma(|z|)-$положительная измеримая весовая функция и интеграл понимается в смысле Лебега. Обозначим $B_{q,\gamma,R} = \{f \in B_{q,\gamma} : \|f\|_{B_{q,\gamma,R}} = \|f(R\cdot)\|_{B_{q,\gamma}} < \infty,$
$0 < R \le 1\}$, $\alpha_{n,r} = n! \cdot \{(n-r)!\}^{-1}$, $E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = inf\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}\}$, где $\mathcal{P}_{n-1}-$ множество всех алгебраических комплексных полиномов $p_{n-1}(z)$ степени $\le n-1$.

Теорема 1. *Для произвольной $f \in B_{q,\gamma,R}$, у которой $z^r f^{(r)} \in B_{q,\gamma}$ при любом $n \ge r$, $n, r \in N$ справедливы точные неравенства*

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} \le (nR^n/(2(\pi-2)\alpha_{n,r}) \int\limits_0^{\pi/n} \omega_2(z^r f^{(r)}, t)_{B_{q,\gamma}} dt,$$

обращающиеся в равенства для $f_0(z) = z^n$, $n \in N$, где $\omega_2(\varphi, t)_{B_{q,\gamma}}-$ модуль непрерывности второго порядка функции $\varphi(z) \in B_{q,\gamma}$.

Пусть $\Phi(t), t \ge 0-$положительная неубывающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любых $r \ge 0$ и $n \in N$, $n \ge r$ определим класс функций

$$W^{(r)}_{q,\gamma}(\Phi, \omega_2) = \left\{ f \in B_{q,\gamma} : \int\limits_0^{\pi/n} \omega_2(z^r f^{(r)}, t)_{B_{q,\gamma}} dt \le \Phi(\pi/n) \right\}.$$

Теорема 2. *Для любых натуральных $r, n \in N$, $n \ge r$ и $1 \le q \le \infty$ имеют место равенства*

$$\lambda_n(W^{(r)}_{q,\gamma}(\Phi, \omega_2), B_{q,\gamma,R}) = nR^n(2(\pi-2)\alpha_{n,r})^{-1} \cdot \Phi(\pi/n),$$

где λ_n-любой из бернштейновский, колмогоровский, гельфандовский, линейный и проекционный $n-$поперечники.

[1] М.Ш.Шабозов , О.Ш.Шабозов. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // ДАН России. 2007. Т.412. №4. с.466-469.