О.И. Кузнецова (ИПММ НАН Украины, Донецк, Украина)

Об интегрируемости кратных тригонометрических рядов

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное вещественное евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $xy = x_1y_1 + \cdots + x_my_m$ — скалярное произведение векторов x и y, $\mathbb{T}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : -\pi \le x_i < \pi,\ i = 1, \ldots, m\}$ — m-мерный тор, $\mathbb{Z}_+^m$ — множество векторов с целыми неотрицательными координатами, $|l|_1 = l_1 + \cdots + l_m$.

Рассмотрим ряд

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{|l|_1 = k} e^{ilx}, \quad x \in \mathbb{T}^m. \tag{1}$$

Приведем простое достаточное условие интегрируемости ряда (1). Предположим, что последовательность коэффициентов удовлетворяет условию

$$a_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2}$$

Пусть

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{|l|_1 = k} e^{ilx}$$

— частичная сумма, $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$.

Теорема. *Если коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условию (2) и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\triangle a_k| \log^m (k+2) < \infty, \tag{3}$$

то ряд (1) сходится почти всюду к некоторой функции $f \in L(\mathbb{T}^m)$, является ее рядом Фурье, а соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^m} |f(x) - S_n(x)|\, dx = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$a_n = o\left(\frac{1}{\log^m n}\right), \quad n \to \infty.$$

Если функция $f \in L(\mathbb{T}^m)$ имеет ряд Фурье вида (1), то из m-мерного аналога неравенства Харди-Литтлвуда для нее следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k+1} \log^{m-1}(k+2) < \infty. \tag{4}$$

Для монотонно убывающих последовательностей a_k достаточное условие (3) и необходимое условие (4) интегрируемости ряда (1) эквивалентны. При $m = 1$ это известный результат.