В.Е.Круглов (Институт математики, экономики и механики, Одесса,Украина)

Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка типа Фукса, коэффициенты которого - целые функции

В комплексной плоскости изучается уравнение

$$t^2 P_1(t)u^{''} + tP_2(t)u^{'} + P_3(t)u = 0 \qquad (1)$$
$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + ..., \;\; i = 1,2,3;\; a_{10} = 1.$$

Решение в окрестности точки $t = 0$ ищется в виде степенного ряда(решение Фробениуса) $u(t) = t^\rho(e_0 + e_1 t + ...), e_0 \neq 0$.

Подставляя $u(t)$ в уравнение (1) и обнуляя коєффициенты при степенях t, приходим к разностному уравнению

$$\alpha_0^{(0)} = \rho(\rho - 1) + \rho e_{20} + e_{30} = 0$$
$$e_k = (\alpha_{k-1}^{(1)} e_{k-1} + ... + \alpha_0^{(k)} e_0)/(-\alpha_k^{(0)}), \;\; k = 1, 2, ...,$$
$$\text{где } \; \alpha_m^{(j)} = (\rho + m)(\rho + m - 1)e_{1j} + (\rho + m)e_{2j} + e_{3j} =$$
$$= \alpha_{1j}(m + d_1^{(j)})(m + d_2^{(j)}); \;\; j, m = 0, 1, ...;$$

$\alpha_k^{(0)} \neq 0$ для любых решений уравнения $\alpha_0^{(0)} = 0$.

Методом цепей [1] это уравнение решено. Для e_k получено явное представление: e_k — дробно-рациональная функция степеней n не выше k коэффициентов функций $P_i(t)$.

Решение $u(t)$ имеет следующую структуру:

$$u(t) = t^p \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{s} t^q \left[e_q F_{s+q/s}(t) + \sum_{i=2}^{\infty} R(i, s, q) F_{s+q/s}^{(i)}(t) \right] \right\}$$

где

$$F_{s+q/s}(t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (q + d_1^{(s)})(q + d_2^{(s)})...(q + d_1^{(s)} + (k-1)s)(q + d_2^{(s)} + (k-1)s) a_{1s}^k t^{ks}}{(q+s)...(q+ks)(\sigma + q + s)...(\sigma + q + ks)}$$

$F_{s+q/s}^{(i)}(t)$ — i-й остаточный член ряда $F_{s+q/s}(t)$, выражение $R(i, k, s)$ — явно представлено через коэффициенты $a_{ij}; \sigma = a_{20} + 2\rho - 1$; при $q = 0, F_s(t)$ — гипегеометрические функции.

[1] Круглов В.Е. Построение фундаментальной системы решений линейного разностного уравнения конечного порядка // УМЖ. – 2009. – 61. №6. – С. 777-794.