А.И. Косолап (Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина)

Обобщение симплекс-метода для решения задач полуопределенной оптимизации

Многие проблемы комбинаторики, статистики, компьютерной геометрии, теории управления сводятся к решению задач полуопределенной оптимизации

$$\min\{C\bullet X | A_i \bullet X = b_i,\ X \geq 0,\ i = 1,\ldots, m\}, \tag{1}$$

где X – полуопределенная матрица размера ($n\times n$), а $C\bullet X = \sum\sum c_{ij}x_{ij}$.

Переменными таких задач являются полуопределенные матрицы X, которые образуют выпуклый конус в евклидовом пространстве. Однако условие положительной определенности матрицы не может быть задано в явном виде. Следовательно, это условие не может быть включено в эффективные алгоритмы выпуклой оптимизации. Разработанный прямо-двойственный метод внутренней точки показал свою эффективность для задач небольшой размерности. Кроме того, его эффективность зависит от выбора неопределенных входных параметров. Поэтому поиск более эффективных алгоритмов продолжается.

В работе положительно полуопределенная матрица представляется линейной комбинацией матриц ранга единица xx^T, которые определяются векторами x с компонентами 0, 1, -1. Это позволяет преобразовать задачу полуопределенной оптимизации (1) к задаче линейного программирования

$$\min\{ \sum\alpha_j\ C\bullet X_j \mid \sum\alpha_j\ A_i \bullet X_j = b_i,\ i = 1,\ldots, m,\ \alpha \geq 0\},$$

где $X_j = x_j x_j^T$. В общем случае задача линейного программирования может не иметь решения, тогда для нахождения начального решения воспользуемся методом искусственного базиса, включив в линейную комбинацию не положительно определенные матрицы и минимизируем коэффициенты при них.

Если задача линейного программирования решена, то будем искать новый вектор, образующий матрицу ранга единица. Эта новая матрица может уменьшить значение целевой функции задачи, если матрица оценки оптимальности Q не является положительно полуопределенной

$$x^T Q x = (C - \sum C\bullet x_j x_j^T B^{-1} A_j)\bullet x_k x_k^T,$$

где матрица B образует текущий базис задачи линейного программирования.

Определение не положительной полуопределенности матрицы Q равносильно минимизации общей квадратичной функции на шаре, которая эффективно разрешима. Если же матрица оценки оптимальности решения задачи линейного программирования является положительно полуопределенной, то исходная задача (1) решена.

Проведенные численные эксперименты с данным методом для задач полуопределенной оптимизации различной размерности показали его высокую эффективность.