А. О. Кореновський (Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, Одеса, Україна)

Про множники функцій з класу Макенхаупта

Для $1 < p < \infty$ клас Макенхаупта $A_p(B)$ складається з усіх невід'ємних на інтервалі $I_0 \equiv (0, b_0)$ $(0 < b_0 \leq \infty)$ функцій f, що задовольняють умову

$$\langle f \rangle_p \equiv \frac{1}{|I|} \int_I f(x)\, dx \left(\frac{1}{|I|} \int_I f^{-1/(p-1)}(x)\, dx \right)^{p-1} \leq B, \quad I \subset I_0,$$

де стала $B > 1$ не залежить від інтервала I, $| \cdot |$ – міра Лебега. Позначаємо $A_p \equiv \cup_{B>1} A_p(B)$. Такі класи мають численні застосування в теорії вагових просторів та в інших питаннях. Фундаментальна властивість класу A_p полягає в так званому самопокращенню показника. А саме, для довільних $p, B > 1$ існують такі $\varepsilon \equiv \varepsilon(p, B) > 0$ та $B' \equiv B'(p, B) \geq B$, що $A_p(B) \subset A_{p-\varepsilon}(B')$. В [2] вивчається наступне питання: *на яку монотонну функцію Φ можна помножити задану $f \in A_p(B)$, щоб добуток $\Phi \cdot f$ залишався в класі A_p?*

Тривіальною достатньою умовою, очевидно, є істотна обмеженість функції $\Phi + \Phi^{-1}$, оскільки в цьому випадку $\langle \Phi f \rangle_p \leq \frac{M}{m} \langle f \rangle_p$, де $M = \operatorname{ess\,sup} \Phi$, $m = \operatorname{ess\,inf} \Phi$. Тому надалі розглядатимемо функції Φ, для яких $\operatorname{ess\,sup}(\Phi + \Phi^{-1}) = \infty$. Наступна теорема надає відповідь на поставлене питання у випадку степеневої функції Φ.

Теорема 1. *Нехай $1 < p, B < \infty$, число ε_0 визначається як корінь рівняння*

$$\frac{\varepsilon_0^{1-p}}{p - \varepsilon_0} = \frac{B}{(p-1)^{p-1}}.$$

Нахай, далі, $0 < b_0 \leq +\infty$ і функція $f \in A_p(B)$ на інтервалі $I_0 \equiv (0, b_0)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (\varepsilon_0 - p, \varepsilon_0)$ знайдеться така стала $B' \equiv B'(p, B, \varepsilon)$, що $x^\varepsilon f(x) \in A_p(B')$. З іншого боку, існують функції $f_0, f_1 \in A_p(B)$, такі, що $x^{\varepsilon_0} f_0(x) \notin A_p$ і $x^{p-\varepsilon_0} f_1(x) \notin A_p$.

Доведення цієї теореми засноване на застосуванні відомої нерівності Харді [1, с. 291]

$$\int_0^b x^{q'/p'-1} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(y)\, dy \right)^{-q'} dx \leq \left(\frac{p'+1}{p'} \right)^{q'} \int_0^b x^{q'/p'-1} f^{-q'}(x)\, dx, \quad p' \geq q' > 0. \quad (1)$$

Для вивчення відмінних від степенивих множників Φ ми встановлюємо спочатку відповідну модифікацію нерівності Харді.

Лема. *Нехай $p > 1$, невід'ємна функція φ не зростає на $(0, b)$ $(0 < b \le \infty)$. Позначимо $\Phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(y)\,dy \quad (0 < x < b)$. Тоді для будь-якої невід'ємної функції f справедлива нерівність*

$$\int_0^b \Phi(x)\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)} dx \le p^{1/(p-1)}\int_0^b \Phi(x) f^{-1/(p-1)}(x)\,dx. \tag{2}$$

Зазначимо, що множник $p^{1/(p-1)}$ перед інтегралом в правій частині (2), взвгалі кажучи, не можна зменшити. Справді, якщо $\varphi \equiv \Phi \equiv 1$, то (2) обертається в звичайну нерівність Харді (1), в якій $p' = q' = \frac{1}{p-1}$ і стала перед інтегралом точна. З іншого боку, якщо $\Phi(x) = x^{-\gamma}$, де $0 < \gamma < 1$, то стала справа в (2) виявляється завищеною, в чому легко переконатись, порівнюючи (2) з (1).

Теорема 2. *Нехай $1 < p, B < \infty$, невід'ємна функція φ не зростає на $I_0 \equiv (0, b_0)$, де $0 < b_0 \le +\infty$, $\Phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(y)\,dy \quad (0 < x < b_0)$. Припустимо, що існує таке $\sigma \equiv \sigma(p, B) > 1$, що для будь-якого $b \in (0, b_0)$ справедлива нерівність*

$$\sup_{0 < x \le \frac{b}{\sigma}} \frac{1}{\Phi(x)}\int_x^b \Phi(y)\frac{dy}{y} > (pB)^{1/(p-1)}. \tag{3}$$

Тоді для будь-якої функції $f \in A_p(B)$ на I_0 функція $\Phi^{1-p}f$ належить до класу A_p.

Наслідок 1. *Якщо в теоремі 2 умову (3) замінити наступною умовою*

$$\sup_{0 < x \le \frac{b}{\sigma}} \frac{1}{\Phi(x)}\int_x^b \Phi(y)\frac{dy}{y} > B\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1},$$

то для будь-якої $f \in A_p(B)$ функція Φf належить до A_p.

Наслідок 2. *Нехай $f \in A_p(B)$ на $I_0 \equiv (0, b_0)$, де $0 < b_0 \le +\infty$. Тоді функція $x^{\varepsilon_1} f(x)$ належить до класу A_p при будь-якому $\varepsilon_1 > 0$, що задавольняє умову*

$$0 < \varepsilon_1 < (pB)^{-1/(p-1)}(p-1),$$

а функція $x^{-\varepsilon_2} f(x)$ належить до класу A_p при будь-якому $\varepsilon_2 > 0$, що задовольняє умову

$$0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{B}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1-p}.$$

Ці обмеження на $\varepsilon_{1,2}$ не є найкращими. Непокращувані границі для $\varepsilon_{1,2}$ в наслідку 2 знаходяться в теоремі 1.

Наслідок 3. *Нехай $f \in A_p$ на $I_0 \equiv \left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. Тоді при будь-якому ε функція $\ln^{\varepsilon}\frac{1}{x} \cdot f(x)$ належить до класу A_p.*

[1] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа. Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

[2] Кореновский А. А. О множителях для весовых функций Макенхаупта// Зб. праць Ін-ту математики НАН України — 2008. — **5**, N 1. — С. 180-190.