Ю.С. Коломойцев (Институт Прикладной Математики и Механики НАНУ, Донецк)

Приближение функций тригонометрическими полиномами с неполным спектром в L_p, $0<p<1$

Пусть A — собственное подмножество множества $\mathbb{Z}$. Тогда система $\{e^{ikx}\}_{k\in A}$ не полна в пространстве $L_p(0,2\pi)$ при $p\ge 1$. Совсем другая ситуация, когда $p<1$. Например, если последовательность $B=\{n_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является симметричной относительно нуля и выпуклой при $k\ge 1$, то система $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus B}$ полна в $L_p(0,2\pi)$, $0<p<1$, тогда и только тогда, когда $\lim_{k\to\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$ [1].

Для некоторых множеств $A\subset\mathbb{Z}$, обладающих определенными арифметическими свойствами, получены оценки величины наилучшего приближения

$$E_n(f,A)_p := \inf_{T\in span\{e^{ikx}\}_{k\in A\cap(-n,n)}} \|f-T\|_{L_p(0,2\pi)}.$$

Рассмотрим класс функций

$$H_{1,p}^{\alpha} := \{\, f \;:\; \|f\|_1 + \sup_{n\ge 1} n^{\alpha} E_{n-2}(f,\mathbb{Z})_p \le 1\}.$$

Обозначим

$$E_n(H_{1,p}^{\alpha},A) := \sup_{f\in H_{1,p}^{\alpha}} E_n(f,A)_p.$$

Теорема. *Пусть* $0<p<1$, $Q=\mathbb{Z}\setminus\{\pm q^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $(q\ge 2)$ *и* $n\in\mathbb{N}$. *Тогда*

(i) *если* $0<\alpha<\frac{1}{p}-1$, *то*

$$E_n(H_{1,p}^{\alpha},Q)_p \asymp n^{-\alpha};$$

(ii) *если* $\frac{1}{p}-1\le\alpha\le\frac{2}{p}-2$, *то*

$$C_1 n^{1-\frac{1}{p}} \le E_n(H_{1,p}^{\alpha},Q)_p \le C_2(\ln(n+1))^{\frac{1}{p}} n^{1-\frac{1}{p}};$$

(iii) *если* $\alpha>\frac{2}{p}-2$, *то*

$$E_n(H_{1,p}^{\alpha},Q)_p \asymp n^{1-\frac{1}{p}}$$

где $\asymp$ *— двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от* p, q *и* α.

Подобные результаты справедливы также для множеств вида $S=\mathbb{Z}\setminus\{\pm k^s\}_{k\in\mathbb{N}}$ $(s\ge 2)$ и $M=\mathbb{Z}\setminus(-m,m)$.

[1] Коломойцев Ю. С. Полнота тригонометрической системы в классах $\varphi(L)$//Матем. заметки. 2007. Т.81. №5. С. 707-712.