

Н.В. Харченко (Інститут математики НАНУ, Київ, Україна)

Про властивості спектру структурно-подібних мір

Структурно-подібна міра μ (див. [1]) на інтервалі $[0, 1]$ задається парою стохастичних матриць Q^* та P наступним чином.

Зафіксуємо стохастичну матрицю $Q^* = \{q_k\}_{k=1}^\infty = \{q_{ik}\}_{i=1, k=1}^\infty$, елементи якої задовольняють умову: $q_{ik} \geq q > 0$. Вона задає Q^* -розбиття відрізка $[0, 1]$ таким чином:

$$[0, 1] = \bigcup_{i_1=1}^n \Delta_{i_1} = \bigcup_{i_1, i_2=1}^n \Delta_{i_1 i_2} = \dots = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k} = \dots,$$

де $|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}| = \prod_{t=1}^k q_{i_t t}$.

Розглянемо стохастичну матрицю $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty = \{p_{ik}\}_{i=1, k=1}^\infty$ з елементами $p_{ik} \geq 0$. Введемо допоміжні міри $\mu_1(\Delta_{i_1}) = p_{i_1 1}$, $\mu_2(\Delta_{i_1 i_2}) = p_{i_1 1} p_{i_2 2}$, ..., $\mu_k(\Delta_{i_1, \dots, i_k}) = p_{i_1 1} p_{i_2 2} \dots p_{i_k k}$, ... Міра μ , асоційована з матрицею P , визначається таким чином: $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$.

Нехай для матриці P виконується умова, що забезпечує точковість міри μ [1, 2]:

$$\prod_{k=1}^\infty \max_i \{p_{ik}\} = \prod_{k=1}^\infty p_{i_k k} > 0,$$

де i_k^m - такий індекс вектора $\mathbf{p}_k$, що $p_{i_k^m k} := \max_i \{p_{ik}\}$. Не втрачаючи загальності, далі вважаємо, що для кожного вектора $\mathbf{p}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) існує єдиний індекс i_k^m .

В даній роботі досліджується, від чого залежить кількість точок у точковому спектрі структурно-подібної міри μ , $\sigma_{pp}(\mu) = \{x \in [0, 1] : \mu(x) > 0\}$, і якою є його структура.

Введемо такі множини: $I_k = \{i : p_{ik} \neq 0\}$, $k = 1, 2, \dots$; та множини $\sigma_1 = \{x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} | \alpha_1 \in I_1, \forall k \geq 2 \alpha_k = i_k^m\}$, $\sigma_t = \{x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} | \alpha_1 \in I_1, \alpha_2 \in I_2, \dots, \alpha_t \in I_t \setminus \{i_t^m\}, \forall k > t \alpha_k = i_k^m\}$ для $t = 2, 3, \dots$

Зауважимо, що якщо $I_k = \{i_k^m : p_{i_k^m k} = 1\}$, то будемо вважати, що $\sigma_k = \emptyset$.

Твердження. $\sigma_{pp}(\mu) = \bigcup_{k=1}^\infty \sigma_k$.

Кількість точок в точковому спектрі міри μ залежить від матриці P . Якщо, починаючи з деякого $k_0 \in \mathbf{N}$, для всіх $k > k_0$ виконується $\max_i \{p_{ik}\} = 1$. Тоді спектр відповідної міри μ , складається зі скінченної кількості точок, а саме

$$|\sigma_{pp}(\mu)| = \sum_{t=1}^{k_0} |\sigma_t| = \prod_{i=1}^{k_0} |I_i|.$$

Інакше, спектр міри μ складається з нескінченної (зчисленної) кількості точок.

- [1] T.Karataieva and V.Koshmanenko, Origination of the singular continuous spectrum in the conflict dynamical systems // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — **14**, N 1.
- [2] Alberverio, S., Koshmanenko, V., Pratsiovytyi, M., Torbin, G. Spectral properties of image measures under the infinite conflict iteration // Positivity. — 2006. — **10**.