І.В. Кальчук, У.З. Грабова (Волинський національний університет, Луцьк, Україна)

Наближення функцій з класів W^r_∞ тригармонійними інтегралами Пуассона[1]

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$, L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних істотно обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup\limits_t |f(t)|$, L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, де норма задана наступним чином $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Через W^r_∞ позначимо множину 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\|f^{(r)}(t)\|_\infty \leq 1$.

Нехай $f \in L$. Величина

$$I_3(\delta; f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})}{4}\delta + \frac{(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2}{8}\delta^2\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\right)dt,$$

називається тригармонійним інтегралом Пуассона функції f (див., наприклад, [1]).

Метою роботи є вивчення асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}(W^r_\infty, I_3(\delta))_C = \sup_{f \in W^r_\infty} \|f(x) - I_3(\delta, f, x)\|_C,$$

Якщо в явному вигляді знайдена функція $g(\delta) = g(W^r_\infty; \delta)$ така, що при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність $\mathcal{E}(W^r_\infty; I_3(\delta))_C = g(\delta) + o(g(\delta))$, то, наслідуючи О.І. Степанця, будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова-Нікольського для класу W^r_∞ і тригармонійного інтеграла Пуассона в метриці простору C.

Має місце наступна теорема

Теорема. *При $\delta \to \infty$ мають місце рівності*

$$\mathcal{E}(W^r_\infty, I_3(\delta))_C = \frac{4-r}{\pi(2-r)}\frac{1}{\delta^r} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \ 0 < r < 2 \tag{1}$$

$$\mathcal{E}\left(W^2_\infty, I_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{\pi}\frac{\ln\delta}{\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \tag{2}$$

$$\mathcal{E}(W^r_\infty, I_3(\delta))_C = \frac{3}{\pi(2-r)}\frac{1}{\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \ r > 2.$$

Відмітимо, що рівності (1) і (2) дають розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для класу W^r_∞ та тригармонійного інтеграла Пуассона в рівномірній метриці.

[1] Gonzales L., Keller E. Wildenhain G. Uber des polyharmonischen Gleichung//Math. Nachr. — 1980. — 95. — P.157–164.

[1] Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф25.1/043)