О.Ф. Калайда (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна)

Про співвідношення нулів алгебраїчного многочлена та нулів його похідних

Порівняння систем Вієта [1] для нулів алгбраїчних многочленів та нулів їх похідних дають можливість встановити певні властивості цих нулів.

Сформулюємо та доведемо наступне твердження.

Теорема 1. Середнє арифметичне симетричних функцій одного порядку систем Вієта алгеб-раїчного многочлена та його похідних є їх інваріант (стала величина).

Доведення. Запишемо алгебраїчний многочлен і його похідні у вигляді (a_j – коефіцієнти многочлена, $a_0 \neq 0$, A_m^p – число розміщень з m по p)

$$P_{n-i}(x) = P_n^{(i)}(x) = A_n^i a_0 x^{n-i} + A_{n-1}^i a_1 x^{n-1-i} + \ldots + A_{i+1}^i a_{n-1-i} x + A_i^i a_{n-i},\ i = \overline{0, n-1}. \quad (1)$$

Тоді для нулів $x_{j,i}$, $j = \overline{1, n-i}, i = \overline{0, n-1},$ цих многочленів системи Вієта мають вигляд

$$S_{k,i} = \frac{A_{n-k}^i}{A_n^i}(-1)^k \frac{a_k}{a_0} = \frac{A_{n-k}^i}{A_n^i} S_{k,0},\ k = \overline{1, n-i}, i = \overline{0, \mathrm{n}-1}.$$

Отже,

$$\frac{S_{k,i}}{A_{n-k}^i} = \frac{S_{k,i}}{C_{n-i}^k}\frac{C_{n-i}^k}{A_{n-k}^i} = \frac{S_{k,0}}{A_n^i} = \frac{S_{k,0}}{C_n^k}\frac{C_n^k}{A_n^i}.$$

(C_{n-i}^k – число комбінацій з $n-i$ по $k,$ воно ж є кількість доданків функції $S_{k,i}$). Скоротивши дану рівність на $\lambda_{n,k,i} = \dfrac{C_{n-i}^k}{A_{n-k}^i} = \dfrac{C_n^k}{A_n^i},$ дістаємо твердження теореми.

Відмітимо, що ліва частина $S_{n-i,0}$ кожного попереднього рівняння системи (1) утворюється з лівої частини $S_{n+1-i,0}$ її наступного рівняння за правилом

$$S_{n,0} = x_1 \ldots x_n,\ S_{n-i,0} = (\sum_{j=\overline{1,n}} \partial S_{n+1-i,0} / \partial x_j)/i,\ i = \overline{1, n-1},$$

а отже, кожний попередній рядок матриці Якобі системи (2) утворюється з її наступного рядка за правилом

$$J_{n+1-i,0,*} = (\partial S_{n+1-i,0} / \partial x_1 \ldots \partial S_{n+1-i,0} / \partial x_n),\ i = \overline{1, n-1},\ J_{1,*,0} = (1 \ldots 1).$$

При цьому, якщо $\mathrm{S}_{\mathrm{n+1-i,0}} = S_{n+1-i,0}(x_1, \ldots, x_n),$ то

$$\mathrm{J}_{\mathrm{n+1-i,j}} = \frac{\partial \mathrm{S}_{\mathrm{n+1-i,0}}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{j}}} = \mathrm{S}_{\mathrm{n-i}}(\mathrm{x}_{\mathit{1}}, \ldots, \mathrm{x}_{\mathrm{j\text{-}1}}, \mathrm{x}_{\mathrm{j+1}}, \ldots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}}),$$

тобто елементи матриці Якобі обчислюються за тим же правилом, що й доданки симетричних многочленів S_k.

Друге твердження стосуватиметься питання про кількість нулів похідної многочлена між йо-го нулями (у загальному випадку функцій кількість таких нулів є, як відомо, непарне число).

Теорема 2. Якщо усі нулі алгебраїчного многочлена дійсні, то між двома його сусідніми ну-лями міститься лише один, причому простий нуль його похідної.

Доведення. Справедливість цього твердження випливає з теореми Ролля та співпадання кіль-кості нулів похідної многочлена та кількості проміжків між ними.

Наслідок. Усі нулі похідної многочлена теж дійсні, а отже, для неї теж чинна дана теорема.

[1] Калайда О.Ф. Чисельні методи. К.: ВПЦ "Київський університет". - 2000. – 250 с.